This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

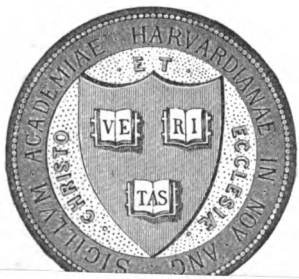
Chr. Joh. Deter,

Repetitorium der Differential- und Integralrechnung

Dritte Auflage

Verlag von Max Rockenstein, Berlin.

Math 3008.943



SCIENCE CENTER LIBRARY

FROM THE BEQUEST OF

HORACE APPLETON HAVEN,

OF PORTSMOUTH, N. H.

(Class of 1842.)

21 Oct., 1896.

Digitized by Google

Digitized by Google

Rezensionen

betreffend

Deter, Repetitorium der Differential- und Integral-Rechnung.

— 2. Auflage. —

Technisches Litteraturblatt. III. Jahrgang. No. 8.

Das vorliegende Werkchen wird von jedem Ingenieur aufs freudigste begrüßt werden. Auf 118 Seiten bringt uns dasselbe eine Zusammenstellung der wichtigsten Sätze und Formeln aus der Differential- und Integralrechnung samt kurzer Anleitung und zeigt uns deren Anwendung an vielen gut gewählten Beispielen — Die Anordnung des ganzen Stoffes muß als eine sehr gelungene bezeichnet werden, und wird das Büchlein als Nachschlagebuch gewiß vorzügliche Dienste leisten.

Praktischer Maschinen-Konstructeur.

1892. No. 25 v. 8. September.

Unter den bündigen und kurzgefaßten Lehrbüchern verdient das Deter'sche Repetitorium der Differential-Rechnung hervorgehoben zu werden. Die Anweisungen, welche darin enthalten sind, reichen wegen ihrer Deutlichkeit bei großer Kürze und Knappheit völlig aus, um namentlich beim Selbststudium einen zuverlässigen Führer abzugeben.

Das Büchlein umfaßt auf 118 Seiten die folgenden Gegenstände: Ableitung der Differentialformeln, höhere Differentiale, Maclaurin'scher und Taylor'scher Satz, Bestimmung der wahren Werthe von $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$ u. s. w., Maxima und Minima, Konkavität und Konvexität, Differentiation verwickelter Funktionen, Differentiation der Funktionen mehrerer absolut Veränderlichen, Maxima und Minima dieser Funktionen, Tangenten und Krümmung der Kurven, Evolventen und Evoluten, die wichtigsten Sätze der Integralrechnung, Rektifikation und Quadratur der Kurven, Komplanation und Kubatur der Rotationskörper, Integration der Differentialgleichungen und Schwerpunktsbestimmungen; der Preis ist sehr mäßig.

Elektrotechnischer Anzeiger. 1892. v. 18. September.

Wie der Titel besagt, enthält die vorliegende Schrift in gedrängter und übersichtlicher Form die Grundsätze der Differential- und Integralrechnung. In Anbetracht der häufigen Verwendbarkeit dieser Rechnungsformen dürfte eine derartige kurzgefaßte Darstellung dieses Gegenstandes um so mehr willkommen geheißen werden, als dieselbe geeignet erscheint, in jedem Falle über etwaige Zweifel Aufklärung zu verschaffen. Außer der Entwickelung der Lehrsätze und Ableitung der notwendigsten Formeln enthält das kleine Werk eine große Anzahl z. B. ins Praktische greifende Aufgaben, deren Lösung in klarer Darstellung beigefügt ist.

Zur weiteren Verdeutlichung ist eine große Anzahl Skizzen beigefügt. Wir glauben kaum, daß dieses Gebiet in knapperer Form zur Darstellung gebracht werden kann, weshalb dieses Repetitorium auf allseitige Anerkennung rechnen darf.

Digitized by Google

Repetitorium

der

Differential-

und

Integralrechnung.

Von

Dr. Chr. Joh. Deter.

Dritte Auflage.

Berlin, 1894.

Verlag von Max Rockenstein.

SW. Hallesche Straße 4.

Digitized by Google

~~III. 6997~~
Math 3008.94.3

HARVARD COLLEGE
OCT 21 1896
LIBRARY.

Warren fund.

Digitized by Google

Erster Abschnitt.

Ableitung der Differentialformeln.

§ 1. Die höhere Analysis betrachtet solche Funktionen, in denen veränderliche Größen mit konstanten so verbunden sind, daß infolge der Veränderung der einen Veränderlichen auch die andere Veränderliche sich ändert. Eine Veränderliche kann sich nun diskret oder stetig ändern. Die durch diskrete Änderung einer Veränderlichen hervorgerufene Änderung der von dieser Veränderlichen abhängigen Veränderlichen behandelt die Differenzenrechnung; die Gesetze, denen stetig sich ändernde Größen unterworfen sind, behandelt die Differentialrechnung.

Die Differentialrechnung wurde gleichzeitig von Leibnitz und Newton erfunden, und von Euler, Kästner, Lagrange, Cauchy ꝛc. weiter ausgebildet.

§ 2. Wenn in den „einfachen Funktionen"

$y = x^n$
$y = a^x$
$y = \lg x$
$y = \sin x$
$y = \cos x$

die Größe x um das unendlich kleine dx vermehrt wird, so läßt sich leicht bestimmen, wie vielmal so groß die Änderung dy der Funktion ist.

1. Ist $y = x^n$, so ist $y + dy = x^n + n\,x^{n-1}\,dx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} dx^2 \ldots$

Da nun jede höhere Potenz von dx als verschwindend klein gegen die niederen fortfällt, so ist $dy = n \,.\, x^{n-1} \cdot dx$.

Digitized by Google

Hierin heißt nx^{n-1} „der Differentialkoeffizient“ oder „Differentialquotient“ oder die „derivierte Funktion“ von x^n.

Anmerk. Ist $y = ax^n \pm c$, so findet sich

$dy = anx^{n-1} \cdot dx$. Der Differentialquotient ist also von dem konstanten Gliede $\pm c$ ganz unabhängig. **(Das Differential einer konstanten Größe ist o.)**

Beispiele.		
	$y = 3x^4 + 5$	$dy = 12x^3 \cdot dx$
	$y = \frac{2}{3}x^{12} - 7$	$dy = 8x^{11} \cdot dx$
	$y = \sqrt[4]{x^3}$	$dy = \frac{3}{4\sqrt[4]{x}} \cdot dx$
	$y = \frac{a}{\sqrt[3]{x}}$	$dy = -\frac{a}{3x\sqrt[3]{x}} \cdot dx$

2. Ist $y = \lg x$*), so ist $y + dy = \lg(x + dx)$

$$= \lg x\left(1 + \frac{dx}{x}\right)$$

$$= \lg x + \lg\left(1 + \frac{dx}{x}\right)$$

$$= \lg x + \frac{dx}{x} - \frac{dx^2}{2x^2} + - \ldots$$

daher $dy = \frac{1}{x} \cdot dx$.

Anmerk. Ist $y = \log x$, so ist $dy = \frac{M}{x} \cdot dx$, worin M der Modulus des Briggsschen Systems ist.

3. Ist $y = a^x$, so ist $y + dy = a^{x+dx} = a^x \cdot a^{dx}$

$$= a^x(1 + \lg a \cdot dx + \frac{(\lg a \cdot dx)^2}{1 \cdot 2} \ldots),$$

daher $dy = a^x \lg a \cdot dx$.

Anmerk. Ist $y = e^x$, so ist $dy = e^x \cdot dx$.

*) lg bezeichnet den natürlichen, log den Briggsschen Logarithmus.

Digitized by Google

4. Ist $y = \sin x$, so ist $y + dy = \sin x \cdot \cos dx + \cos x \cdot \sin dx$.

$$= \sin x \left(1 - \frac{dx^2}{1 \cdot 2} + \ldots\right) +$$

$$\cos x \left(dx - \frac{dx^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \ldots\right)$$

daher $dy = \cos x \cdot dx$.

5. Ist $y = \cos x$, so ist

$$y + dy = \cos x \cdot \cos dx - \sin x \cdot \sin dx.$$

$$= \cos x \left(1 - \frac{dx^2}{1 \cdot 2} \ldots\right)$$

$$- \sin x \left(dx - \frac{dx^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \ldots\right)$$

daher $dy = -\sin x \cdot dx$.

§ 3. Das Differential der Summe einfacher Funktionen ist die Summe der Differentiale dieser Funktionen.

Bew. Ist $y = f(x) + F(x)$, so ist
$y + dy = f(x) + df(x) + F(x) + dF(x)$, daher
$dy = df(x) + dF(x)$.

Beispiele.

$y = ax^n + a^x$	$dy = (anx^{n-1} + a^x \lg a) \cdot dx$
$y = ax^n + e^x$	$dy = (anx^{n-1} + e^x) \cdot dx$
$y = x^3 - 2x^2 + 3x + 4$	$dy = (3x^2 - 4x + 3) \cdot dx$
$y = 3\sqrt{x} - 5\sqrt[3]{x^4}$	$dy = \left(\frac{3}{2\sqrt{x}} - \frac{20}{3}\sqrt[3]{x}\right) \cdot dx$
$y = a \lg x + b \sin x$	$dy = \left(\frac{a}{x} + b \cos x\right) \cdot dx$
$y = a^x + b \cos x + c$	$dy = (a^x \lg a - b \sin x)\, dx$.

§ 4. Das Differential des Produktes zweier einfachen Funktionen ist die Summe der mit dem anderen Faktor multiplicierten Differentiale der einzelnen Faktoren.

Bew. Ist $y = fx \cdot Fx$, so ist $y + dy = (fx + dfx)\ (Fx + dFx)$, daher $dy = Fx \cdot dfx + fx \cdot dFx$.

Digitized by Google

Beispiele.

$y = x^5 \cdot e^x$	$dy = (5x^4 e^x + x^5 e^x)\,dx$
$y = ax^7 \cdot \lg x$	$dy = (7ax^6 \lg x + ax^6)\,dx$
$y = a^x \cdot \lg x$	$dy = \left(a^x \lg a \lg x + \frac{a^x}{x}\right)dx$
$y = ae^x \cdot \lg x$	$dy = ae^x \left(\lg x + \frac{1}{x}\right)dx$
$y = x^4 \cdot \sin x$	$dy = (4x^3 \sin x + x^4 \cos x)\,dx$
$y = 2 \sin x \cdot \cos x$	$dy = 2(\cos^2 x - \sin^2 x)\,dx = 2 \cos 2x \cdot dx.$
$y = x^n \cdot e^x \cdot \lg x$	$dy = x^{n-1} e^x (n \lg x + x \lg x + 1)\,dx$
$y = x^n \cdot \sin x \cdot \cos x$	$dy = \left(\frac{n}{2} x^{n-1} \sin 2x + x^n \cos 2x\right)dx$
$y = x^7 \cdot x^5 \cdot x^3$	$dy = [x^8 \cdot 7x^6 + x^7 (5x^7 + 3x^7)]\,dx = 15x^{14}\,dx.$

§ 5. Das Differential des Quotienten zweier einfachen Funktionen wird erhalten, wenn man den Nenner mit dem Differential des Zählers multipliciert, hiervon den Zähler mal dem Differential des Nenners subtrahiert und die erhaltene Differenz durch das Quadrat des Nenners dividiert.

Bew. Ist $y = \frac{fx}{Fx}$, so ist $y \cdot Fx = fx$, daher

$$Fx \cdot dy + y \cdot dFx = dfx$$

$$dy = \frac{dfx - y \cdot dFx}{Fx}$$

$$= \frac{dfx - \frac{fx}{Fx} \cdot dFx}{Fx}$$

$$= \frac{dfx \cdot Fx - fx \cdot dFx}{(Fx)^2}$$

Beispiele.

$y = \frac{a^x}{x^n}$	$dy = \frac{a^x (x \lg a - a)}{x^{n+1}} \cdot dx$
$y = \frac{e^x}{x^n}$	$dy = \frac{e^x (x - n)}{x^{n+1}} \cdot dx$
$y = \frac{x}{\lg x}$	$dy = \frac{\lg x - 1}{(\lg x)^2} \cdot dx$
$y = \frac{a}{x^n}$	$dy = -\frac{an}{x^{n+1}} \cdot dx$

Digitized by Google

$$y = \frac{a^x}{\sin x} \quad \left| \quad dy = \frac{\sin x \cdot a^x \lg x - a^x \cos x}{\sin^2 x} \cdot dx \right.$$

$$y = \frac{a^x}{\cos x} \quad \left| \quad dy = \frac{\cos x \cdot a^x \lg x + a^x \sin x}{\cos^2 x} \cdot dx \right.$$

§ 6. Aufgabe. Die Differentiale von tang x und cotg x zu finden.

Lösung. $d \operatorname{tang} x = d \frac{\sin x}{\cos x}$

$$= \frac{\cos^2 x \, dx + \sin^2 x \, dx}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} \cdot dx.$$ Ebenso findet man

$$d \operatorname{cotg} x = -\frac{1}{\sin^2 x} \cdot dx$$

§ 7. Aufgabe. Die Differentiale von arc (sin = x), arc (cos = x), arc (tang = x), arc cotg = x) zu finden.

Lösung. Ist $x = \sin y$, also $y = \operatorname{arc}(\sin = x)$, so ist

$$dx = \cos y \cdot dy, \text{ also } dy = \frac{1}{\cos y} \cdot dx \text{ oder}$$

$$d \operatorname{arc}(\sin = x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot dx.$$

Ist $x = \cos y$, also $y = \operatorname{arc}(\cos = x)$, so ist

$$dx = -\sin y \cdot dy, \text{ also } dy = -\frac{1}{\sin y} \cdot dx \text{ oder}$$

$$d \operatorname{arc}(\cos = x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot dx.$$

Ist $x = \operatorname{tang} y$, also $x = \operatorname{arc}(\operatorname{tang} = x)$, so ist

$$dx = \frac{1}{\cos^2 y} \cdot dy, \text{ also } dy = \cos^2 y \cdot dx \text{ oder}$$

$$d \operatorname{arc}(\operatorname{tang} = x) = \frac{1}{1 + x^2} \cdot dx.$$

Ist $x = \operatorname{cotg} y$, also $y = \operatorname{arc}(\operatorname{cotg} = x)$, so ist

$$dx = -\frac{1}{\sin^2 y} \cdot dy, \text{ also } dy = -\sin^2 y \cdot dx \text{ oder}$$

$$d \operatorname{arc}(\operatorname{cotg} = x) = -\frac{1}{1 + x^2} \cdot dx.$$

Digitized by Google

§ 8. Zusammenstellung der bisher gefundenen Differentialformeln.

1. $$dx^n = nx^{n-1} \cdot dx.$$

2. $$d \lg x = \frac{1}{x} \cdot dx$$

3. $$d \log x = \frac{M}{x} \cdot dx$$

4. $$d a^x = a^x \lg x \cdot dx$$

5. $$d e^x = e^x \cdot dx$$

6. $$d(f \pm F) = df \pm dF$$

7. $$d(f \cdot F) = F \cdot df + f \cdot dF$$

8. $$d \frac{f}{F} = \frac{F \cdot df - f \cdot dF}{F^2}$$

9. $$d \sin x = \cos x \cdot dx$$

10. $$d \cos x = -\sin x \cdot dx$$

11. $$d \operatorname{tang} x = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot dx$$

12. $$d \operatorname{cotg} x = -\frac{1}{\sin^2 x} \cdot dx$$

13. $$d \operatorname{arc}(\sin = x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx$$

14. $$d \operatorname{arc}(\cos = x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx$$

15. $$d \operatorname{arc}(\operatorname{tang} = x) = \frac{1}{1+x^2} \cdot dx$$

16. $$d \operatorname{arc}(\operatorname{cotg} = x) = -\frac{1}{1+x^2} \cdot dx.$$

Digitized by Google

§ 9. Aufgabe. Das Differential einer Funktion von einer Funktion von x zu finden.

Lösung. Ist $z = fy$ und $y = \varphi x$, und wächst x um dx, so wächst y um dy und infolge dessen z um dz.

Nun ist $z + dz = f(y + dy) = fy + f'y \cdot dy$, daher

$$dz = f'y \cdot dy$$
$$= f'y \cdot \varphi' x \, dx.$$

Man findet daher das Differential einer Funktion f_y, worin y eine Funktion φ_x von x ist, indem man f_y erst nach y. differentiiert und für y und dy ihre Werthe φ_x und $\varphi'_x \cdot dx$ substituiert.

Beispiele.

1) $z = e^y$, worin $y = \sin x$.

$$dz = e^y \cdot dy$$
$$= e^{\sin x} \cdot \cos x \cdot dx.$$

2) $z = e^y$, worin $y = a\sqrt[3]{x^2} + bx\sqrt[6]{x^5}$.

$$dz = e^y \cdot dy$$
$$= e^{ax^{\frac{2}{3}} - bx^{\frac{5}{6}}} \cdot \left(\tfrac{2}{3}ax^{-\frac{1}{3}} + \tfrac{5}{6}bx^{-\frac{1}{6}}\right) dx.$$

3) $z = y^{\frac{4}{3}}$, worin $y = a + 2x - 3x^2$.

$$dz = \tfrac{4}{3}y^{\frac{1}{3}} \cdot dy$$
$$= \tfrac{4}{3}(a + 2x - 3x^2) \cdot (2 - 6x)dx.$$

4) $z = \lg y$, worin $y = 4x^7 + 5\cos x$.

$$dz = \frac{1}{y} \cdot dy$$
$$= \frac{1}{4x^7 + 5\cos x} \cdot (28x^6 - 5\sin x)dx.$$

5) $z = y^3$, worin $y = \sin x$.

$$dz = 3y^2 dy$$
$$= 3\sin^2 x \cdot \cos x \, dx$$

6) $z = \operatorname{arc}(\sin = y)$, worin $y = \sqrt{1 - 2x}$.

$$dz = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} \cdot dy$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{2x - 4x^2}} \cdot dx$$

Digitized by Google

7) $z = \sqrt{a+x} \cdot \sqrt[3]{a-x^2}$

$$dz = (a-x^2)^{\frac{1}{3}}\, d(a+x)^{\frac{1}{2}} + (a+x)^{\frac{1}{2}} \cdot d(a-x^2)^{\frac{1}{3}}$$

$$= (a-x^2)^{\frac{1}{3}} \cdot \tfrac{1}{2}(a+x)^{-\frac{1}{2}}\, dx + (a+x)^{\frac{1}{2}} \cdot \tfrac{1}{3}(a-x^2)^{-\frac{2}{3}} \cdot -2x\, dx$$

$$= \frac{3a - 4ax - 7x^2}{6(a+x)^{\frac{1}{2}} \cdot (a-x^2)^{\frac{2}{3}}} \cdot dx$$

8) $z = \dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x^2}}$.

$$dz = \frac{3 - 4x - 3x^2}{6(1+x)^{\frac{1}{2}} \cdot (1+x^2)^{\frac{2}{3}}} \cdot dx$$

Zuweilen wird das Differentiiren erleichtert, wenn man zuerſt logarithmiert, oder auch umgekehrt auf die Zahlen übergeht, wie in folgenden Beiſpielen:

9) $\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}}{\sqrt{1+x}}$.

Mittelſt § 5 würde ſich nach weitläufigem Rechnen ergeben:

$$dz = \frac{x^2 + 4x - 3}{6(1+x^2)^{\frac{2}{3}} \cdot (1+x)^{\frac{3}{2}}} \cdot dx$$

Daſſelbe Reſultat ergiebt ſich leichter, wenn zuerſt logarithmiert wird:

$$\log z = \tfrac{1}{3} \lg (1+x^2) - \tfrac{1}{2} \lg (1+x)$$

$$\frac{1}{z}\, dz = \tfrac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x\, dx - \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x} \cdot dx$$

$$dz = \frac{2x\,(1+x^2)^{\frac{1}{3}}}{3(1+x^2) \cdot (1+x)^{\frac{1}{2}}}\, dx - \frac{(1+x^2)^{\frac{1}{3}}}{2(1+x)(1+x)^{\frac{1}{2}}} \cdot dx$$

$$= \frac{4x(1+x) - 3(1+x^2)}{6(1+x^2)^{\frac{2}{3}} \cdot (1+x)^{\frac{3}{2}}}\, dx$$

10) $y = x^x$

$$\lg y = x \lg x$$

$$\frac{1}{y}\, dy = \lg x \cdot dx + \frac{x}{x}\, dx$$

$$dy = x^x\,(1 + \lg x\, dx.$$

Digitized by Google

11) $z = \lg \operatorname{arc}\,(\operatorname{tang} = ax)$

$$e^z = \operatorname{arc}\,(\operatorname{tang} = ax)$$

$$e^z\,dz = \frac{a}{1 + a^2x^2} \cdot dx.$$

$$dz = \frac{a}{(1 + a^2x^2)\,\operatorname{arc}\,(\operatorname{tang} = ax)} \cdot dx$$

Dasselbe Resultat hätte sich umständlicher mittelst § 8, Formel 2 und 15 ergeben.

12) $z = \lg \operatorname{arc}\left(\operatorname{cotg} = \frac{a}{1+x}\right)$.

$$e^z = \operatorname{arc}\left(\operatorname{cotg} = \frac{a}{1+x}\right)$$

$$e^z\,dz = -\frac{1}{1 + \left(\frac{a}{1+x}\right)^2}\,d\,\frac{a}{1+x}$$

$$dz = \frac{a}{[a^2 + (1+x)^2]\,\operatorname{arc}\left(\operatorname{cotg} = \frac{a}{1+x}\right)} \cdot dx.$$

Dasselbe Resultat hätte sich umständlicher mittelst § 8, Formel 2 und 16 ergeben.

§ 10. Uebungsaufgaben.

1. $d\,(4ax^3\sqrt{x}) = 14ax^{\frac{1}{2}}dx$

2. $d\left(1 + \frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}\,dx$

3. $d\left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \frac{1 + 2x^2}{2x\sqrt{x}}dx$

4. $d(a + x)^n = n(a + x)^{n-1}\,dx$

5. $d(a - x)^7 = -7(a - x)^6\,dx$

6. $d(a^2 - x^2)^7 = -14(a^2 - x^2)^6 x\,dx$

7. $d\left(\frac{1}{1 - x}\right) = \frac{1}{(1 - x)^2}\,dx$

Digitized by Google

8. $$d\left(\frac{x}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2}\,dx^*$$

9. $$d\left(\frac{1}{a+x^2}\right) = -\frac{2x}{(a+x^2)^2}\,dx$$

10. $$d\sqrt{1-x} = -\frac{1}{2\sqrt{1-x}}\,dx$$

11. $$d\sqrt{a^3+x^3} = \frac{x^2}{\sqrt[3]{(a^3+x^3)^2}}\,dx$$

12. $$d\sqrt[3]{a^4+x^4} = \frac{4x^3}{3\sqrt[3]{(a^4+x^4)^2}}\,dx$$

13. $$d\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = -\frac{1}{\sqrt{(1-x)\,(1+x)^3}}\,dx$$

14. $$d\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}} = -\frac{2x}{\sqrt{(1-x^2)\,(1+x^2)^3}}\,dx$$

15. $$d\lg(a+x) = \frac{1}{a+x}\,dx$$

16. $$d\lg(a+x\sqrt{x}) = \frac{3\sqrt{x}}{2a+2x\sqrt{x}}\,dx$$

17. $$d\lg(x+x\sqrt{x}) = \frac{1+\frac{3}{2}\sqrt{x}}{x+x\sqrt{x}}\,dx$$

18. $$d\lg(x^n) = \frac{n}{x}\,dx$$

19 $$d(\lg x)^n = \frac{n}{x}(\lg x)^{n-1}\,dx$$

*) Dasselbe Differential, wie vorher, da die Funktionen $\frac{1}{1-x}$ und $1\frac{x}{1-x}$ nur um ein konstantes Glied verschieden sind $\left(\frac{1}{1-x} = 1+\frac{x}{1-x}\right)$.

Digitized by Google

20. $$d \lg \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{a^2}{x(a^2+x^2)} dx$$

21. $$d\, e^{\lg x} = \frac{e^{\lg x}}{x} dx$$

22. $$d\, e^{(e^x)} = e^{(e^x - 1)} dx$$

23. $$d \lg \lg x = \frac{1}{x \lg x} dx$$

24. $$d \lg \lg \lg x = \frac{1}{x \lg x \,.\, \lg \lg x} dx$$

25. $$d \lg \sin x = \operatorname{cotg} x \,.\, dx$$

26. $$d \lg \cos x = -\operatorname{tang} x \,.\, dx$$

27. $$d \sin^3 x = 3 \sin^2 x \,.\, \cos x \,.\, dx$$

28. $$d \cos^3 x = -3 \cos^2 x \,.\, \sin x \,.\, dx$$

29. $$d (\sin^3 x - \cos^3 x) = \tfrac{3}{2} \sin 2x \,.\, (\sin x + \cos x)\, dx$$

30. $$d (\sin^4 x - \cos^4 x) = 2 \sin 2x \,.\, dx$$

31. $$d (e^x \sin nx) = e^x (\sin nx + n \cos nx)\, dx$$

32. $$d \sin 2x = 2 \cos 2x \,.\, dx$$

$$d \cos 2x = -2 \sin 2x \cdot dx$$

$$d \operatorname{tang} 2x = \frac{2}{\cos^2 2x} dx$$

$$d \operatorname{cotg} 2x = -\frac{2}{\sin^2 2x} dx$$

33. $$d \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$$

$$d \operatorname{arc}\left(\cos = \frac{x}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$$

34. $$d \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right) = \frac{1}{a^2 - x^2} dx$$

Digitized by Google

35. $$d\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} = \frac{\sin x}{2\sqrt{2-2\cos x}}\,dx$$

36. $$d\lg\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{x-\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{2}{\sqrt{x^2-a^2}}dx.$$

Zweiter Abschnitt.

Höhere Differentiale. Maclaurinscher und Taylorscher Satz.

§ 11. Wenn $f_x = x^4+4x^3a+6x^2a^2+4xa^3+a^4$, so ist der erste Differentialquotient $\frac{df_x}{dx}$ oder $f^I x = 4x^3+12ax^2+12a^2x+4a^3$;

der zweite Differ. $\frac{d^2f_x}{dx^2}$ oder $f^{II}{}_x = 12x^2+24ax+12a^2$

der dritte „ $\frac{d^3f_x}{dx^3}$ oder $f^{III}{}_x = 24x+24a$

der vierte „ $\frac{d^4f_x}{dx^4}$ oder $f^{IV}{}_x = 24$

der fünfte „ $\frac{d^5f}{dx^5}$ oder $f^V{}_x = 0$.

Wenn $f_x = \frac{1-x^4}{1-x} = 1+x+x^2+x^3$, so ist

$$\frac{df}{dx} \text{ oder } f^I = \frac{1-4x^3+3x^4}{(1-x)^2} = 1+2x+3x^2$$

$$\frac{d^2f}{dx^2} \text{ oder } f^{II} = \frac{2-12x^2-8x^3-6x^4}{(1-x)^3} = 2+6x$$

$$\frac{d^3f}{dx^3} \text{ oder } f^{III} = 6$$

Digitized by Google

$\frac{d^4f}{dx^4}$ oder $f^{IV} = 0$.

Wenn $f_x = e^x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \ldots$, so ist

$\frac{df}{dx} = e^x$ und so alle folgenden Differentialquotienten $= e^x$.

Wenn $f_x = \mathbf{arc\,(tang} = x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + - \ldots$ so ist

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{1+x^2} = \mathbf{1} - x^2 + x^4 - x^6 + - \ldots$$

$$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} = -2x + 4x^3 - 6x^5 + - \ldots \text{ oder}$$

$$\frac{1}{(1+x^2)^2} = \mathbf{1} - 2x^2 + 3x^4 - 4x^6 + - \ldots$$

Anmerk. Dieses letzte Beispiel zeigt, wie man durch fortgesetztes Differentiieren summierbare Reihen samt ihren Summen finden kann.

§ 13. **Maclaurinscher Satz.** Läßt sich eine f_x in eine nach Potenzen von x fortschreitende Reihe verwandeln, so ist, wenn in f_x und allen derivierten Funktionen $f^I{}_x$, $f^{II}{}_x$, $f^{III}{}_x$, ... $x = o$ gesetzt wird,

$$f_x = f_{(o)} + f^I{}_{(o)}\, x + f^{II}{}_{(o)} \cdot \frac{x^2}{2!} + f^{III}{}_{(o)} \cdot \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

Beweis. Wenn

$$\begin{aligned}
f_x &= A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots, \text{ so ist} \\
f^I{}_x &= B + 2Cx + 3Dx^2 + \ldots \\
f^{II}{}_x &= 2C + 2\cdot 3Dx + 3\cdot 4Ex^2 + \ldots \\
f^{III}{}_x &= 2\cdot 3D + 2\cdot 3\cdot 4Ex + \ldots \\
f^{IV}{}_x &= 2\cdot 3\cdot 4E + \ldots
\end{aligned}$$

Wird in diesen Gleichungen $x = o$ gesetzt, so ergiebt sich

$$\begin{aligned}
f_{(o)} &= \mathbf{A} \\
f^I{}_{(o)} &= \mathbf{B}
\end{aligned}$$

Digitized by Google

$$f^{II}_{(o)} = 2C, \text{ daher } C = \frac{1}{2} f^{II}_{(o)}$$

$$f^{III}_{(o)} = 2 \cdot 3D, \text{ daher } D = \frac{1}{3!} f^{III}_{(o)}$$

$$f^{IV}_{(o)} = 2 \cdot 3 \cdot 4E. \text{ daher } E = \frac{1}{4!} f^{IV}_{(o)} \text{ ꝛc.}$$

Beispiele:

$$\sin(a+bx) = \sin a + b\cos a \cdot x - \frac{b^2 \sin a}{2!} x^2 - \frac{b^3 \cos a}{3!} x^3 + + - - \cdots$$

$$\cos a(a+bx) = \cos a - b \sin a \cdot x - \frac{b^2 \cos a}{2!} x^2 + \frac{b^3 \sin a}{3!} x^3 + - - \cdots$$

§ 14. **Taylorscher Satz.** Wenn in einer f_x die Veränderliche x um $\triangle x$ wächst, so läßt sich $f_x + \triangle_x$ als eine Reihe darstellen, deren Glieder nach Potenzen von x fortschreiten, nämlich

$$f_{x+\triangle x} = f_x + f^I{}_x \cdot \triangle x + f^{II}{}_x \cdot \frac{\triangle x^2}{2!} + f^{III}{}_x \cdot \frac{\triangle x^3}{3!} + \cdots$$

Beweis. Sei $f_{x+\triangle x}$ = der Reihe $f_x + A \cdot \triangle x + B \cdot \triangle x^2 + C \cdot \triangle x^3 + \cdots$

Für jede Funktion von $(x+y)$ sind die Differentialquotienten dieselben, möge man nach x oder nach y differentiieren; z. B.

$z = (x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ giebt nach x differentiiert:

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = 3x^2 + 6xy + 3y^2,$$

nach y differentiiert: $\left(\frac{dz}{dy}\right) = 3x^2 + 6xy + 3y^2$. Wird nun die Reihe $f_x + A\triangle x + B\triangle x^2 + C\triangle x^3 + \cdots$ nach x differentiiert, so ergiebt sich

$$f'x + \left(\frac{dA}{dx}\right)\triangle x + \left(\frac{dB}{dx}\right)\triangle x^2 + \left(\frac{dC}{dx}\right)\triangle x^3 + \cdots;$$

wird sie nach $\triangle x$ differentiiert, so ergiebt sich

$$A + 2B\triangle x + 3C\triangle x^2 + 4D\triangle x^3 + \cdots$$

Beide Ausdrücke müssen für jeden Wert von $\triangle x$ einander gleich sein, daher

$$A = f'x$$

$$2B = \frac{df'x}{dx} = f''x, \text{ daher } B = \frac{f''x}{2!}$$

Digitized by Google

$$3\,C = \frac{d\,f'''\,x}{2!\,dx} = \frac{f'''\,x}{2!} \text{ daher } C = \frac{f'''\,x}{3!} \text{ ꝛc.}$$

Anmerk. Setzt man in

$$f_{x+\Delta x} = f_x + f' \cdot \Delta x + f'' \cdot \frac{\Delta x^2}{2!} + f''' \cdot \frac{\Delta x^3}{3!} + \ldots.$$

$x = o$ und $\Delta x = x$, so erhält man für f_x die Maclaurinsche Reihe

$$f_{(o)} + f'_{(o)}\,x + f''_{(o)}\,\frac{x^2}{2!} + f'''_{(o)}\,\frac{x^3}{3!} + \ldots.$$

§ 15. In der Taylorschen Reihe läßt sich das Inkrement Δx stets so klein annehmen, daß $f^I{}_x \cdot \Delta x$ größer wird, als die Summe aller übrigen Glieder. Soll nämlich

$$f^I{}_x \cdot \Delta x > f^{II} \cdot \frac{\Delta x^2}{2!} + f^{III} \cdot \frac{\Delta x^3}{3!} + \ldots. \text{ oder}$$

$$f^I{}_x > \left(\frac{f^{II}}{2!} + f^{III} \cdot \frac{\Delta x}{3!} + \ldots.\right) \Delta x \text{ sein,}$$

so ist dies offenbar dann der Fall, wenn

$$f^I{}_x > p\,(1 + \Delta x + \Delta x^2 + \ldots.)\ \Delta x,$$

(wo p den größten Koeffizienten der Potenzen von Δx bezeichnet); wenn also

$$\frac{f^I}{p} > (1 + \Delta x + \Delta x^2 + \ldots.)\ \Delta x \text{ oder}$$

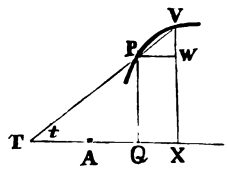
$$\frac{f^I}{p} > \frac{1 - (\Delta x)^n}{1 - \Delta x} \cdot \Delta x \text{ oder}$$

wenn $\frac{\Delta x}{1 - \Delta x} < \frac{f^I}{p}$, also wenn $\Delta x < \frac{f^I}{p + f^I}$.

Bei unendlich kleinem Zuwachse dx der Veränderlichen x wird also f_x wachsen, wenn der erste Differentialquotient $f^I{}_x$ positiv ist, hingegen abnehmen, wenn $f^I{}_x$ negativ ist. Dieses Bestreben von f_x, zu wachsen oder abzunehmen, ist nicht konstant, sondern mit x zugleich veränderlich, da f^I selber eine Funktion von x ist. (Nur für die Funktion $ax + b$, für welche $f' = a$, also konstant ist, ist dieses Bestreben konstant.)

Digitized by Google

§ 16. Der Verlauf der stetig fließenden Funktion $y = f_x$ läßt sich bildlich durch eine Kurve darstellen. Sei z. B.



$AQ = x$, $QX = \triangle x$,

$PQ = y$, $VWX = y + \triangle y$.

Wenn nun $y = f_x$, so ist

$$y + \triangle y = y + f' \triangle x + f^{II} \frac{\triangle x^2}{2!} + f^{III} \frac{\triangle x^3}{3!} + \ldots.$$

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = f^I + f^{II} \frac{\triangle x}{2!} + f^{III} \frac{\triangle x^2}{3!} + \ldots.$$

Für ein unendlich kleines dx ist also

$$\frac{dy}{dx}$$ oder f' die trigonometrische tang des Winkels τ, welchen die durch P gezogene Tangente mit der Abscissenachse bildet.

Denkt man sich zwischen P und V einen Punkt v, durch welchen die Tangente an die Kurve parallel der Sehne PV ist, und bezeichnet Qv, die Projektion von Pv, mit $\theta \triangle x$ (wo θ ein echter Bruch ist, so ist für den Punkt v, dessen Abscisse $x + \theta \triangle x$,

$\tang \tau = f^I_{(x + \theta \triangle x)}$, daher auch

$\frac{\triangle y}{\triangle x} = f^I_{(x + \theta \triangle x)} \cdot \triangle x$, daher

$\triangle y = f^I_{(x + \theta \triangle x)} \cdot \triangle x$.

Es existiert also stets ein echter Bruch θ, so daß für ein beliebiges $\triangle x$ $f_{x + \triangle x}$ genau $= f_x + f^I_{(x + \theta \triangle x)} \cdot \triangle x$.

Digitized by Google

Dritter Abschnitt.

Bestimmung des wahren Wertes einer Funktion, welche eine der Formen $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0\cdot\infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$ annimmt.

§ 17. Eine gebrochene Funktion kann für einen besonderen Wert der Veränderlichen den Wert $\frac{0}{0}$ annehmen. Es sei z. B. $y = \frac{x^3 - 64}{x - 4}$ die Gleichung einer Kurve, so ist

für $x =$	0	1	2	3	4	5
$y =$	16	21	28	37	$\frac{0}{0}$	61.

Es fragt sich nun, welches der wahre Wert der zu $x = 4$ gehörigen Ordinate y ist. Dividiert man Zähler und Nenner obiger gebrochenen Funktion durch $x - 4$, so ergiebt sich

$$y = x^2 + 4x + 16, \text{ daher für } x = 4$$
$$y = 48.$$

Daß die Funktion $\frac{x^3 - 64}{x - 4}$ für $x = 4$ auf die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ führt, rührt offenbar daher, daß Zähler und Nenner einen gemeinsamen Faktor haben, der für den Wert $x = 4$ zu Null wird. Wird dieser gemeinschaftliche Faktor vorher entfernt, so läßt sich, wie bei obigem Beispiele, der Wert $\frac{0}{0}$, den y für ein bestimmtes x annimmt, leicht bestimmen. Oft geschieht dies aber leichter mittelst der Differentialrechnung.

Es sei z. B. x_0 derjenige Wert von x, für welchen die gebrochene Funktion $\frac{F_x}{f_x}$ den Wert $\frac{0}{0}$ erhält, so ist, da

$$\frac{F(x_0 + \triangle x)}{f(x_0 + \triangle x)} = \frac{F(x_0) + F'(x_0)\triangle x + F''(x_0)\frac{\triangle x^2}{2!} + \ldots}{f(x_0) + f'(x_0)\triangle x + f''(x_0)\frac{\triangle x^2}{2!} + \ldots}$$

Digitized by Google

$$= \frac{F'(x_0) + F''(x_0)\frac{\triangle x}{2!} + \ldots.}{f'(x_0) + f''(x_0)\frac{\triangle x}{2!} + \ldots.},$$

für $\triangle x = 0$ der wahre Wert von $\frac{F(x_0)}{f(x_0)} = \frac{F'(x_0)}{f'(x_0)}$.

Man findet also den wahren Wert einer gebrochenen Funktion, die für x_0 die Form $\frac{0}{0}$ annimmt, indem man Zähler und Nenner differentiiert, durch dx dividiert, und in den erhaltenen Quotienten $\frac{F^I}{f^I}$ für x den Wert x_0 setzt.

Sollte auch $\frac{F'(x_0)}{f'(x_0)} =$ auf die Form $\frac{0}{0}$ führen, so müssen in $\frac{F'(x)}{f'(x)}$ nochmals Zähler und Nenner differentiiert werden, so daß alsdann

$$\frac{F(x_0)}{f(x_0)} = \frac{F''(x_0)}{f''(x_0)}.$$

Beispiele.

1. $\frac{x^3 - 64}{x - 4}$ hat für $x = 4$ den Wert $\frac{0}{0}$.

   Der wahre Wert ist $\frac{3x^2}{2}$ für $x = 4$, also 48.

2. $\frac{x^2}{1 - \cos x}$ hat für $x = 0$ den Wert $\frac{0}{0}$.

   Der wahre Wert ist $\frac{2x}{\sin x}$ für $x = 0$, also wieder $\frac{0}{0}$. Durch nochmaliges Differentiieren ergiebt sich $\frac{2}{\cos x}$ für $x = 0$, also 2.

3. $\frac{1 - \cos x}{x^2}$ hat für $x = 0$ den Wert $\frac{0}{0}$.

   Der wahre Wert ist $\frac{\sin x}{2x}$ für $x = 0$, also wieder $\frac{0}{0}$. Durch nochmaliges Differentiieren ergiebt sich $\frac{\cos x}{2}$ für $x=0$, also $\frac{1}{2}$.

4. $\frac{\cos x - \sin x + 1}{\cos x + \sin x - 1}$ hat für $x = 90°$ den Wert $\frac{0}{0}$.

Digitized by Google

Der wahre Wert ist $\frac{-\sin x - \cos x}{-\sin x + \cos x}$ für $x = 90^0$, also 1.

5. $\frac{x-1}{x^2-1}$ für $x=1$ giebt $\frac{1}{2}$.

6. $\frac{x^n-1}{x-1}$ „ „ „ „ n.

7. $\frac{\lg x}{x-1}$ „ „ „ „ 1.

8. $\frac{1-x}{\lg x}$ „ „ „ „ -1.

9. $\frac{\sin x}{x^2}$ für $x=0$ giebt ∞.

10. $\frac{\sin^2 x}{x}$ „ „ „ „ 0.

11. $\frac{x-\sin x}{x^3}$ „ „ „ „ $\frac{1}{6}$.

12. $\frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$ für $x=0$ giebt 2.

13. $\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$ „ „ „ „ 2.

14. $\frac{a^x - b^x}{4}$ „ „ „ „ $\lg a - \lg b$.

15. $\frac{a - x - a\lg a + a\lg x}{a - \sqrt{2ax - x^2}}$ für $x=a$ giebt -1.

§ 18. Dasselbe Verfahren, wie im vorigen §, ist anzuwenden, wenn $\frac{F(x_0)}{f(x_0)} = \frac{\infty}{\infty}$ wird.

Beweis. $\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{1/f_{(x)}}{1/F_{(x)}} = \frac{0}{0}$ für den Wert x_0.

Durch Differentiieren ergiebt sich $\frac{-(fx)^{-2} \cdot f'x}{-(Fx)^{-2} \cdot F'x} = \frac{(Fx)^2 f'x}{(fx)^2 \cdot F'x}$

Der wahre Wert von $\frac{F(x_0)}{f(x_0)}$ ist also $\frac{[F(x_0)]^2 \cdot f'(x_0)}{[f(x_0)]^2 \cdot F'(x_0)}$, daher durch Division mit $\frac{F(x_0)}{f(x_0)}$

Digitized by Google

$$1 = \frac{F(x_0) \cdot f'(x_0)}{f(x_0) \cdot F'(x_0)}, \text{ woraus}$$

$$\frac{F(x_0)}{f(x_0)} = \frac{F'(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Beispiel. $\frac{\tan g\, 5x}{\tan g\, x}$ hat für $x = 90^0$ den Wert $\frac{\infty}{\infty}$.

Der wahre Wert ist $\frac{5}{\cos^2 5x} : \frac{1}{\cos^2 x}$ für $x = 90^0$, also $= \frac{0}{0}$.

Durch nochmaliges Differentiieren ergiebt sich $-\frac{10 \cos x \cdot \sin x}{2 \cos 5x \cdot -5 \sin 5x}$ für $x = 90$, also $\frac{0}{0}$.

Durch drittes Differentiieren ergiebt sich $\left(\text{da } \frac{\cos x \cdot \sin x}{\cos 5x \cdot \sin 5x} = \frac{\sin 2x}{\sin 10x}\right)$

$$\frac{2 \cos 2x}{10 \cos 10x} \text{ für } x = 90^0, \text{ also } \tfrac{1}{5}.$$

§ 19. Auch der Fall, in welchem $F_x \cdot f_x$ für x_0 den Wert $0 \cdot \infty$ annimmt, läßt sich auf § 17 zurückführen, da

$$F \cdot f = \frac{F}{f^{-1}}, \text{ also für } x_0 \text{ gleich } \tfrac{0}{0}.$$

Beispiel.

$x \lg x$ hat für $x_0 = 0$ den Wert $0 \cdot -\infty$.

Nun ist $x \cdot \lg x = \frac{x}{(\lg x)^{-1}}$, also für $x = 0$ gleich $\frac{0}{-0}$.

Durch Differentiieren ergiebt sich $\frac{1}{-1 \cdot (\lg x)^{-2} \cdot \frac{1}{x}}$

oder $\frac{-x}{(\lg x)^{-2}}$ für $x = 0$ gleich $\frac{-0}{-\infty} = 0$.

Derselbe Wert hätte sich auch auf folgende Art ergeben:

$$x \lg x = \frac{\lg x}{x^{-1}}, \text{ also für } x = 0 \text{ gleich } -\frac{\infty}{\infty}$$

Durch Differentiieren ergiebt sich $\frac{1/x}{-x^{-2}}$ oder $-x$, also 0.

Digitized by Google

§ 20. Auch die Fälle, in welchen $(F_x)^{f_x}$ für $x_0 = 0$ einen der Werte 0^0, ∞^0, 1^∞ erhält, lassen sich auf § 17 zurückführen.

Sei nämlich w der gesuchte wahre Wert der Funktion F^f für $x = x_0$, so ist $\lg w = f \cdot \lg F$, also

$$w = e^{\frac{\lg F}{f^{-1}}},$$ worin der Exponent zu bestimmen ist.

Beispiele.

1. $(1+x)^{1/x}$ ist für $x = 0$ gleich 1^∞.

Der wahre Wert ist $e^{\frac{\lg(1+x)}{x}}$ für $x = 0$, also $e^{\frac{0}{0}}$.

Differentiiere $\frac{\lg(1+x)}{x}$, so ergiebt sich $\frac{1}{1+x}$, also $w = e^{\frac{1}{1+x}} = e$.

2. $(1+1/x)^x$ ist für $x = \infty$ gleich 1^∞.

Der wahre Wert ist $e^{\frac{\lg(1+1/x)}{1/x}}$ für $x = \infty$, also $e^{\frac{0}{0}}$.

Differentiiere $\frac{\lg(1+1/x)}{1/x}$, so ergiebt sich $\frac{\frac{1}{1+1/x} \cdot -x^{-2}}{-x^{-2}}$ oder $\frac{1}{1+1/x}$,

daher $w = e^{\frac{1}{1+1/x}}$ für $x = 0$, oder e^1.

3. $(1-x)^{1-x}$ ist für $x = 1$ gleich 0^0.

Der wirkliche Wert ist $e^{(1-x)^{-1}}$ für $x = 1$, also $e^{-\frac{\infty}{\infty}}$.

Differentiiere Zähler und Nenner von $\frac{\lg(1-x)}{(1-x)^{-1}}$, so ergiebt sich $-(1-x)$,

daher $w = e^{-(1-x)}$ für $x = 1$, also gleich $e^0 = 1$.

4. $x^{\frac{1}{1-x}}$ ist für $x = 1$ gleich 1^∞.

Der wirkliche Wert ist $e^{\frac{\lg x}{1-x}}$ für $x = 1$, also $e^{\frac{0}{0}}$.

Differentiiere Zähler und Nenner von $\frac{\lg x}{1-x}$, so ergiebt sich

$$w = e^{\frac{1/x}{-1}} \text{ für } x = 1, \text{ also } 1/e.$$

Digitized by Google

5. $\left(\frac{1}{1-x}\right)^{1-x}$ hat für $x=1$ den Wert ∞^0.

Der wirkliche Wert ist $e^{\frac{\lg(1-x)^{-1}}{(1-x^{-1}}}$ für $x=1$, also $e^{\frac{\infty}{\infty}}$.

Differentiiere Zähler und Nenner von $\frac{\lg(1-x)^{-1}}{(1-x)^{-1}}$ so ergiebt sich $1-x$,

daher $w=e^{1-x}$ für $x=1$, also 1.

§ 21. Wenn die Differenz zweier gebrochenen Funktionen für einen bestimmten Wert von x die Form $\infty-\infty$ liefert, so sind die gebrochenen Funktionen auf denselben Nenner zu bringen. Es ist z. B.

$$\frac{1}{\lg x}-\frac{1}{x-1} \text{ für } x=1 \text{ gleich } \infty-\infty.$$

$\frac{x-1-\lg x}{(x-1)\cdot\lg x}$ für $x=1$ gleich $\frac{0}{0}$. Durch Differentiieren ergiebt sich $\frac{1-1/x}{\lg x+\frac{x-1}{x}}$ oder $\frac{x-1}{x\lg x+x-1}$ für $x=1$ gleich $\frac{0}{0}$. Durch nochmaliges Differentiieren wird $\frac{1}{\lg x+{}^{x}/_{x}+1}$ für $x=1$ gleich $\frac{1}{2}$.

§ 22. Sind die für $x=x_0$ im Zähler und Nenner verschwindenden Faktoren Potenzen mit gebrochenen Exponenten, in welchem Falle die Reihen in § 17 für $F(x_0+\triangle x)$ und $f(x_0+\triangle x)$ nicht nach ganzen Potenzen von $\triangle x$ fortschreiten können, so läßt sich die Differentialrechnung nicht zur Bestimmung des wahren Wertes von $\frac{0}{0}$ benutzen. Es wird z. B.

$$\frac{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}{(x-a)^{\frac{3}{2}}} \text{ für } x=a \text{ gleich } \frac{0}{0}.$$

Hier würde das Differentiieren kein Ende nehmen, also nicht zur Bestimmung des wahren Wertes von $\frac{0}{0}$ führen.

Setzt man aber $a+h$ statt x, so ergiebt sich

$$\frac{[(a+h)^2-a^2]^{\frac{3}{2}}}{(a+h-a)^{\frac{3}{2}}}=\left(\frac{2ah+h^2}{h}\right)^{\frac{3}{2}}=(2a+h)^{\frac{3}{2}},$$

woraus für $h=0$ der Wert $(2a)^{\frac{3}{2}}$ resultiert.

Digitized by Google

Anmerk. Dasselbe Resultat hätte sich wie folgt ergeben:

$w = \left(\frac{x^2 - a^2}{x - a}\right)^{\frac{3}{2}}$ ist für $x = a$ gleich $\frac{0}{0}$; ebenso

$w^{\frac{2}{3}} = \frac{x^2 - a^2}{x - a}$ für $x = a$ gleich $\frac{0}{0}$.

Durch Differentiieren des Zählers und Nenners ergiebt sich

$w^{\frac{2}{3}} = \frac{2x}{1}$ oder $2a$, daher $w = (2a)^{\frac{3}{2}}$.

Vierter Abschnitt.

Maxima und Minima.

§ 23. Der Wert einer Funktion f_x heißt ein Maximum, wenn er größer ist, als der in der Reihe der Werte von f_x unmittelbar vorhergehende und nächstfolgende, ein Minimum, wenn er kleiner als diese ist. In dem Momente, wo eine f_x ein Maximum wird, hört ihr Bestreben zu wachsen auf, und sie beginnt abzunehmen; in dem Momente, wo sie ein Minimum wird, hört ihr Bestreben abzunehmen auf, und sie beginnt zu wachsen. Nach § 15 wächst aber f_x, wenn der erste Differentialquotient f^1 positiv ist; sie nimmt ab, wenn f^1 negativ ist. Wenn also f^1 vom Wachsen zum Abnehmen übergeht, oder umgekehrt, so muß notwendig f^1 sein Vorzeichen ändern, also entweder gleich o oder gleich ∞ sein. *)

*) Eine Funktion kann vom Positiven zum Negativen (und umgekehrt) nur dann übergehen, wenn sie erst 0 oder ∞ wird; es ist z. B.

$a - x$ positiv für $x < a$, negativ für $x > a$, und gleich Null für den Zwischenwert $x = a$.

$\frac{1}{a - x}$ ist positiv für $x < a$, negativ für $x > a$, und gleich ∞ für den Zwischenwert $x = a$.

Digitized by Google

Hieraus ergiebt sich folgende Regel, diejenigen Werte von x zu finden, für welche f_x ein Maximum oder Minimum wird:

Suche den Wert x_0, für welchen $f^I{}_x$ gleich Null oder unendlich wird, und untersuche, ob der nächstvorhergehende und der nächstfolgende Wert von $f^I{}_x$ (also die Werte von f^I für $x = x_0 - dx$ und $x = x_0 + dx$) entgegengesetzte Vorzeichen haben. Ist nun der nächst vorhergehende Wert von f^I positiv, der nächstfolgende negativ, so findet ein Maximum statt; ist der nächst vorhergehende Wert von f^I negativ, der nächstfolgende positiv, so findet ein Minimum statt.

§ 24. Für den Fall, daß alle $f^I{}_x$ stetig bleiben, also nicht plötzlich ∞ werden, ergiebt sich mittelst des Taylorschen Satzes eine leichtere Regel, als die eben gegebene allgemeine, zur Auffindung der Werte von x, für welche f_x ein Maximum oder Minimum wird. Es ist nämlich

$$f(x_0 \pm dx) = f(x_0) \pm f^I(x_0) \cdot dx + f^{II}(x_0) \cdot \frac{dx^2}{2!} \pm \ldots .$$

Da nun für ein Maximum oder Minimum f^I gleich Null ist, so bleibt für diesen Fall

$$f(x_0 \pm dx) = f(x_0) + f^{II}(x_0) \frac{dx^2}{2!} \pm \ldots .$$

Ist nun $f^{II}(x_0)$ positiv, so ist der dem Wert $f(x_0)$ unmittelbar vorhergehende und folgende Wert von f_x größer, als $f(x_0)$; dann ist also f_x ein Minimum. Ist aber $f^{II}(x_0)$ negativ, so sind die beiden Nachbarwerte von f_x kleiner, als $f(x_0)$; dann ist also f_x ein Maximum.

Anmerk. Sollte für denselben Wert x_0, für welchen f' gleich Null wird, auch f'' zu Null werden, so wäre

$$f(x_0 \mp dx) = f(x_0) \mp f^{III}(x_0) \frac{dx^3}{3!} + f^{IV}(x_0) \frac{dx^4}{4!} \pm \ldots .$$

Ist nun $f^{III}{}_{(x_0)}$ positiv, so ist der $f_{(x_0)}$ nächstvorhergehende Wert von

Digitized by Google

f_x kleiner als $f_{(x_0)}$, der nächstfolgende aber größer als $f_{(x_0)}$. Ist aber $f^{III}_{(x_0)}$ negativ, so ist der $f_{(x_0)}$ nächstvorhergehende Wert von f_x größer, als $f_{(x_0)}$, der nächstfolgende kleiner, als $f_{(x_0)}$. In beiden Fällen ist $f_{(x_0)}$ weder ein Maximum noch ein Minimum.

Werden ferner für x_0 zugleich f^I, f^{II}, f^{III} gleich Null, so läßt sich leicht zeigen, daß $f_{(x_0)}$ ein Maximum, wenn $f^{IV}_{(x_0)}$ negativ, hingegen ein Minimum, wenn $f^{IV}_{(x_0)}$ positiv ist, 2c.

§ 25. Übungsaufgaben.

1. Die Werte von x zu finden, für welche die Funktion $x^3 - x^2 - x + 1$ ein Maximum oder Minimum wird.

Lösung. $f' = 3x^2 - 2x - 1 = 0$ liefert $x_0 = 1$ oder $-\frac{1}{3}$.
$f^{II} = 6x - 2$. f'' wird für $x = 1$ positiv,
für $x = -\frac{1}{3}$ negativ, daher ist
die Funktion $x^3 - x^2 - x + 1$ ein Minimum für $x = 1$, ein
Maximum für $x = -\frac{1}{3}$.

2. Die Maxima und Minima der Funktion $\frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{2}x^2 + 6x + 3$ zu bestimmen.

Lösung. $f' = x^3 - 7x + 6 = 0$, daher (Analysis S. 44) $x_0 = 1$ od. 2 od. -3.

$f^{II} = 3x^2 - 7$. f^{II} wird für $x = 1$ negativ,
für $x = 2$ positiv,
für $x = -3$ positiv,

daher ist die gegebene Funktion ein Maximum $(5\frac{3}{4})$ für $x = 1$, ein Minimum (5) für $x = 2$, und ein zweites Mimimum $(-26\frac{1}{4})$ für $x = -3$.

3. Die Maxima und Minima von $\frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{2}x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 3x + 1$ zu bestimmen.

Lösung. $f^I = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 10x + 3 = 0$ liefert $x_0 = 1$ oder 1 oder 1 oder 3.
$f^{II} = 4x^3 - 18x^2 + 24x - 10$.
$f^{III} = 12x^2 - 36x + 24$
$f^{IV} = 24x - 36$
Für $x = 1$ wird $f^{II} = 0$, $f^{III} = 0$, f^{IV} negativ, daher ein Maximum (1,7) für $x = 1$.
Für $x = 3$ wird f^{II} positiv, daher ein Minimum (0,1) für $x = 3$.

4. Desgleichen von $e^x + 2\cos x + e^{-x}$.

Digitized by Google

Lösung. $f^I = e^x - 2\sin x - e^{-x} = 0$ liefert $x = 0$, für welchen Wert f^{II}
$f^{II} = e^x - 2\cos x + e^{-x}$ und $f^{III} = 0$, f^{IV} positiv wird, daher
$f^{III} = e^x + 2\sin x - e^{-x}$ ein Minimum (4) für $x = 0$.
$f^{IV} = e^x + 2\cos x + e^{-x}$

5. Welcher von allen Brüchen übertrifft sein Quadrat am meisten?

Antwort: $\frac{1}{2}$

6. Welches von allen Rechtecken vom Inhalte a hat den kleinsten Umfang?

Lösung. Sei x die Basis, also $\frac{a}{x}$ die Höhe des gesuchten Rechtecks, so ist der Umfang $= 2x + \frac{2a}{x}$.

$$f' = 2 - \frac{2a}{x^2} = 0 \text{ liefert } x = \sqrt{a}.$$

Es hat daher von allen Rechtecken von gleichem Inhalte das Quadrat den kleinsten Umfang.

7. Welches von allen Rechtecken von gleichem Umfange u hat den größten Inhalt?

Lösung. Die Basis des gesuchten Rechtecks ist $\frac{u}{4}$; daher hat **von allen Rechtecken von gleichem Umfange das Quadrat den größten Inhalt.**

8. In ein Dreieck von der Basis a und Höhe h soll das größtmögliche Rechteck eingezeichnet werden. Welche Höhe ist ihm zu geben?

Lösung. Seien x u. y die Höhe und Basis des gesuchten Rechtecks, so ist $h : a = (h-x) : y$, daher $y = \frac{a}{h}(h-x)$; demnach ist der Inhalt $= \frac{a}{h}(hx - x^2)$. Dies ist ein Maximum oder Minimum für den Wert x_0 welcher f', nämlich $\frac{a}{h}(h-2x)$, zu Null macht, nämlich für $x_0 = h/2$. Da nun f^{II} für $x = \frac{h}{2}$ negativ ist, so findet für $x = \frac{h}{2}$ ein Maximum Statt.

9. In einen Kreis vom Radius r soll das größtmögliche Rechteck eingezeichnet werden. Welche Basis ist ihm zu geben?

Digitized by Google

Lösung. Sei x die Basis des gesuchten Rechtecks, so ist dessen Höhe $\sqrt{4r^2 - x^2}$ und der Inhalt $= x\sqrt{4r^2 - x^2}$. Diese Funktion wird für dasselbe x_0 ein Maximum, für welches ihr Quadrat $4r^2x^2 - x^4$ ein Maximum wird. $f' = 8r^2x - 4x^3 = 0$ für $x = 0$ oder $r\sqrt{2}$.

$f'' = 8r^2 - 12x^2$. Für $x = 0$ wird f'' positiv, also das Rechteck ein Minimum; für $x = r\sqrt{2}$ wird f'' negativ, also das Rechteck ein Maximum.

Da für $x = r\sqrt{2}$ auch die Höhe $= r\sqrt{2}$ wird, so ist das **größte Rechteck, welches einem Kreise eingezeichnet werden kann, ein Quadrat, dessen Inhalt $2r^2$ ist.**

10. Um einen Kreis ein gleichschenkliges Dreieck zu beschreiben, dessen Inhalt ein Maximum ist.

Lösung. Das gesuchte Dreieck ist ein gleichseitiges.

11. In einer Kugel einen geraden Kegel vom größtmöglichen Inhalte zu konstruieren.

Lösung 1. Bezeichne die Entfernung des Mittelpunkts der Grundfläche von der Kugeloberfläche (DE) mit x, so ist der Grundflächenradius $AD = \sqrt{2rx - x^2}$, die Höhe $BD = 2r - x$, daher der Kegelinhalt $(x^3 - 4rx^2 + 4r^2x)\frac{\pi}{3}$. Setze nun $3x^2 - 8rx + 4r^2 = 0$, so ergiebt sich $x_0 = \frac{2}{3}r$ für den Maximalkegel.

Lösung 2. Setze $\angle AOD = \xi$; dann ergiebt sich $\cos \xi_0 = \frac{1}{3}$ ꝛc.

12. In einem geraden Kegel den größten Cylinder zu konstruieren.

Lösung. Die Cylinderhöhe ist $\frac{h}{3}$.

13. Welcher von allen geraden Cylindern vom Inhalte a hat die kleinste Gesamtoberfläche?

Lösung. Sei x der Radius der Grundfläche, y die Höhe des Cylinders; dann ist $y = \frac{a}{x^2\pi}$ und die Gesamtoberfläche $= 2\left(\frac{a}{x} + x^2\pi\right)$. Wird nun $f' = \frac{2a}{x^2} + 4\pi x = 0$ gesetzt, so

Digitized by Google

resultiert $x_0 = \sqrt[3]{\frac{a}{2\pi}}$ und $y_0 = 2\sqrt[3]{\frac{a}{2\pi}}$. Es ist daher die Höhe des gesuchten Cylinders gleich dem Durchmesser seiner Grundfläche.

14. Eine Zahl a in zwei Summanden zu zerlegen, deren Produkt ein Maximum wird.

Lösung: $\frac{a}{2} + \frac{a}{2}$.

15. Aus einem rechteckigen Stück Pappe sollen, nachdem an den Ecken gleiche Quadrate fortgenommen worden, die Seitenstücke senkrecht gegen das Mittelstück aufgebogen werden und der entstehende hohle Kasten ein Maximum sein.

Lösung. Die Fläche des Mittelstücks ist $(a-2x)(b-2x)$, daher der Kasteninhalt $x(a-2x)(b-2x)$. Für den Maximalkasten ist

$$x_0 = \frac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}.$$

Anmerk. Ist $b=a$, so ist $x^0 = \frac{a}{6}$ und der Inhalt des Maximalkastens $\frac{2}{27}a^3$.

16. Durch einen geg. Punkt P zwischen den Schenkeln eines rechten Winkels A die kürzeste Linie MN zu ziehen.

Lösung 1. Seien a u. b die Koordinaten von P. Bezeichne NA mit x, so ist

$$MN^2 = x^2 + AM^2$$
$$= x^2 + \frac{b^2x^2}{(x-a)^2}.$$

Wird nun $f'_x = 2x + \frac{2b^2x(x-a)^2 - 2b^2x^2(x-a)}{(x-a)^4} = 0$ gesetzt, so ist $x_0 = a + \sqrt[3]{ab^2}$.

Lösung 2. Bezeichne $\angle$ MNA mit ξ. Dann ist $MN = \frac{a}{\cos\xi} + \frac{b}{\sin\xi}$. Wird der erste Differentialquotient dieser Funktion gleich Null gesetzt, so ergiebt sich $\tan\xi_0 = \sqrt[3]{b/a}$, daher wieder AN (oder $a + b\cot\xi_0$) $= a + \sqrt[3]{ab^2}$.

Digitized by Google

17. Für welchen Wert von x wird x^x ein Minimum?

Lösung. Da $x = e^{\lg x}$, so ist $x^x = e^{x \lg x}$; daher $f' = e^{x \lg x}(1 + \lg x)$. Hierin kann der erste Faktor nicht gleich Null gesetzt werden; daher setze $1 + \lg x = 0$; dann ist $\lg x_0 = -1$, also $x_0 = 1/e$.

18. Für welchen Wert von x wird $\sqrt[x]{x}$ ein Maximum oder Minimum?

Lösung. $f_x = \sqrt[x]{x}$

$\lg f = 1/x \lg x$. Durch Differentiieren wird

$$\frac{1}{f}\,df = \left(-\frac{1}{x^2}\lg x + \frac{1}{x^2}\right)dx.$$

$$\frac{df}{dx} \text{ oder } f' = f_x\left(-\frac{1}{x^2}\lg x + \frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt[x]{x}}{x^2}(1 - \lg x).$$ Setze $1 - \lg x = 0$, so ist $\lg x_0 = 1$, also $x_0 = e$;

daher wird die Funktion $\sqrt[x]{x}$ ein Maximum, $(\sqrt[e]{e})$, für $x = e$.

Fünfter Abschnitt.

Von der Konkavität und Konvexität der Kurven.

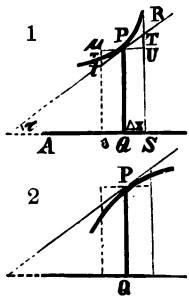
§ 26. Eine Kurve heißt in Bezug auf einen ihrer Punkte **konkav** gegen die Abscissenachse, wenn sie zwischen dieser und der durch den Punkt gezogenen Tangente liegt, **konvex**, wenn sie außerhalb der Abscissenachse und der durch den Punkt gezogenen Tangente liegt.

Die Punkte, wo eine Kurve von Konkavität in Konvexität, oder umgekehrt, übergeht, heißen **Wendepunkte**.

Eine Kurve, die einen Wendepunkt hat, kann durch eine Gerade in mehr als zwei Punkten geschnitten werden.

Digitized by Google

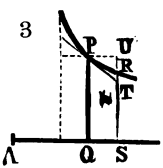
§ 27. **Aufgabe.** Für welches x wird eine Kurve, deren Gleichung $y = f_x$ ist, **konkav oder konvex?**



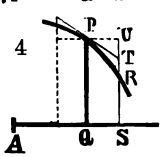
Lösung. PQ=y wachse um RU=$\triangle y$, **wenn** AQ = x um QS = $\triangle x$ wächst. Dann ist nach dem Taylorschen Satze

$$\triangle y = f'_x \triangle x + f'' \frac{\triangle x^2}{2!} + f''' \frac{\triangle x^3}{3!} \ldots .$$

Wird nun $\triangle x$ so klein angenommen, daß jedes Glied dieser Reihe größer ist, als die Summe aller folgenden (§ 15), so ist für **wachsende positive Ordinaten** (Fig. 1 u. 2), für welche f'_x positiv ist, $\triangle y$ oder RU größer, als TU oder $f' \cdot \triangle x$ (§ 16), sobald f'' positiv ist. Hingegen ist $\triangle y$ kleiner, als TU, sobald f'' negativ ist. Im ersten Falle ist die Kurve im Punkte P vorwärts konvex, im zweiten Falle vorwärts konkav gegen die Abscissenachse. (In derselben Weise läßt sich bei Annahme eines negativen $\triangle x$ zeigen, daß im ersten Falle die Kurve auch rückwärts konvex, sowie im zweiten Falle auch rückwärts konkav ist).



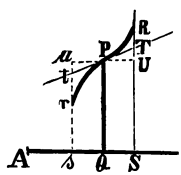
Für **abnehmende positive Ordinaten** (Fig. 3 u. 4), für welche f'_x negativ ist, ist $\triangle y$ oder RU kleiner, als TU, sobald f'' positiv ist (Konvexität), hingegen größer als TU, sobald f'' negativ ist (Konkavität).



Ähnlich läßt sich zeigen, daß für negative Ordinaten gerade umgekehrt Konvexität stattfindet, wenn f'' negativ, Konkavität, wenn f'' positiv ist. Daher ist mit Berücksichtigung des Vorzeichens von y die allgemeine Regel:

Eine Kurve $y = f_x$ ist so lange konkav, als $y \cdot f''_x$ negativ, und so lange konvex, als $y \cdot f''_x$ positiv ist.

§ 28. Für diejenige Abscisse x_0, für welche $f'' = 0$, ist



$$\triangle y = f'_x \triangle x + f''' \frac{\triangle x^3}{3!}$$

Ist nun f''' positiv, so ist für

$+\triangle x$ $\triangle y$ od. UR > UT, also d. Kurve vorw. konv.

$-\triangle x$ $\triangle y$ od. ur > ut, „ „ „ „ konk.

Ist aber f''' negativ, so ist für

$+\triangle x$ $\triangle y <$ UT, also d. K. vorw. konk.

$-\triangle x$ $\triangle y <$ ut, „ „ „ rückw. konv.

In beiden Fällen, also wenn $f'' = 0$ und f''' positiv oder

Digitized by Google

negativ, ist P ein Wendepunkt; daher sind **die Abscissen der Wendepunkte einer Kurve $y = f_x$ die Wurzeln der Gleichung $f'' = 0$.**

Anmerk. Sollte für denselben Wert x_0, für welchen $f'' = 0$ wird, auch der folgende oder mehrere folgende Differentialquotienten $= 0$ werden, so kann **ein Wendepunkt nur dann vorhanden sein, wenn der erste nicht zu Null werdende Differentialquotient von ungerader Ordnung ist.**

§ 29. Diskussion einiger Kurven.

1. $y = \sqrt{ax}$ (Parabelgleichung).

$f' = \frac{1}{2}a^{\frac{1}{2}}\,x^{-\frac{1}{2}}$
$f'' = -\frac{1}{4}a^{\frac{1}{2}}\,x^{-\frac{3}{2}}$

Da f'' für jedes x negativ ist, so ist die Parabel überall konkav gegen die Abscissenachse.

2. $y = a \lg x$.

$f' = a/x$
$f'' = -a/x^2$

Für $x < 1$ ist y negativ, $y \cdot f''_x$ positiv, daher der unterhalb der Abscissenachse liegende Zweig konvex.

Für $x = 1$ ist $y = 0$.

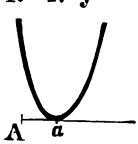
Für $x > 1$ ist $y \cdot f''_x$ negativ, daher der oberhalb der Abscissenache liegende Zweig konkav. Kein Wendepunkt, da f'' für keinen Wert von x zu Null wird.

3. $y = (x-a)^3$.

$f' = 3(x-a)^2$
$f'' = 6(x-a)$
$f''' = 6$

Für $x = a$ ist
- $y = 0$ weder ein Minimum noch Maximum nach § 24 Anm.
- $f' = 0$, dah. d. Abscissenachs. Tang.
- $f'' = 0$. Wendepunkt, da der erste nicht verschwindende Diff.quot. von ungerader Ordnung ist.

4. I. $y = (x-a)^4$.



$f^{I} = 4(x-a)^3$
$f^{II} = 12(x-a)^2$
$f^{III} = 24(x-a)$
$f^{IV} = 24$.

Für $x = a$ ist
- $y = 0$ ein Minim. n. § 24 Anm.
- $f' = 0$, dah. d. Abciff. Tangente
- $f'' = 0$; doch kein Wendepunkt da der erste nicht verschwindende Diff.-quot. von gerader Ordnung ist.

Für $x \lesssim a$ ist f'' stets positiv, daher die Kurve überall konvex.

II. $y = -(x-a)^4$.

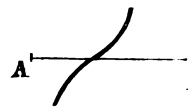
$f^{I} = -4(x-a)^3$
$f^{II} = -12(x-a)^2$
$f^{III} = -24(x-a)$
$f^{IV} = -24$.

Für $x = a$ ist
- $x = 0$ e. Maxim. n. § 24 Anm.
- $f' = 0$, dah. d. Abciff. Tang.
- $f'' = 0$; doch kein Wendepunkt.

Für $x \lesssim a$ ist y negativ und $y = f''_x$ positiv, daher die (unterhalb der Achse liegende) Kurve konvex.

Digitized by Google

5. $y = (x-a)^5$.



$f^I = 5(x-a)^4$
$f^{II} = 20(x-a)^3$
:
$f^V = 120$.

Für $x=a$ ist $y=0$; weder Maximum, noch Minimum.
$f' = 0$, daher die Abscissenachse Tangente.
$f'' = 0$. Wendepunkt.
Für alle $\pm$ Ordinaten ist die Kurve konvex.

6. $y = x + \sqrt{x}$.

$f^I = 1 \pm \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$
$f^{II} = \mp \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$
$f^{III} = \pm \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$
$f^{IV} = \mp \frac{15}{16}x^{-\frac{7}{2}}$

Für negative x ist y imaginär;
für $x = 0$ ist $y = 0$;
für x zwischen 0 u. 1 ist y $\pm$;
für $x = 1$ ist $y = 2$ od. 0;
für $x > 1$ ist y positiv.

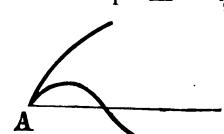
Die Kurve erstreckt sich nach der positiven Seite hin mit zwei Schenkeln ins Unendliche.

Für $x = 0$ schneidet der erste Schenkel die Abscissenachse, und da f' für $x = 0$ unendlich, so steht die Tangente in A senkrecht auf der Abscissenachse. Da ferner f' für bis ins Unendliche wachsende x stets positiv ist, so hat **der erste Schenkel weder ein Maximum noch ein Minimum,** und da f'' stets negativ ist, so ist dieser Schenkel überall konkav.

Der zweite Schenkel schneidet für $x = 0$ die Abcissenachse, und da für $x = 0$ $f' = \infty$, so steht die Tangente in A senkrecht auf der Abscissenachse. Da ferner f' für $x = \frac{1}{4}$ zu Null wird, und f'' für $x = \frac{1}{4}$ positiv ist, so findet **für $x = \frac{1}{4}$ ein Minimum** Statt $(-\frac{1}{4})$. Da für x zwischen 0 u. 1 der Wert von $y \cdot f''$ negativ ist, so ist der zweite Schenkel unterhalb der Abscissenachse konkav. Für $x = 1$ schneidet er die Abscissenachse zum zweiten male. Für $x > 1$ ist f' stets negativ, daher dann kein Maximum oder Minimum mehr stattfindet. Da ferner für $x > 1$ der zweite Diff.quotient stets positiv ist, so ist der zweite Schenkel für sämtliche $x > 1$ konvex.

7. $y = \sqrt[3]{x} \pm \sqrt{x}$.

$f^I = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \pm \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$
$f^{II} = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} \mp \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$



Die Kurve erstreckt sich nach der positiven Seite hin mit zwei Schenkeln ins Unendliche.

I. **Schenkel.** Für $x = 0$ schneidet der erste Schenkel die Abscissenachse. Da f' für jedes $+x$ positiv ist, so hat er **kein Maximum oder Minimum,** und da f'' stets negativ ist, so ist er überall konkav.

Digitized by Google

II. **Schenkel.** Für $x = 0$ schneidet er die Abscissenachse. f' wird $= 0$ für $x = (\frac{2}{3})^6$; da für diesen Wert f'' negativ ist, so findet für ihn ein **Maximum** Statt. f'' wird $= 0$ für $x = (\frac{8}{9})^6$. Wendepunkt, da der dritte Differentialquotient **nicht** $= 0$ ist.

8. $y = 3 \pm (x-8)\sqrt{x-3}$.

Für $x < 3$ ist y imaginär;
für $x = 3$ ist $y = 3$;
für $x = 8$ ist $y = 3$;
für $x > 3$ hat y zwei Werte, die gleichviel über und unter 3 sind, so daß die Kurve durch eine in der Entfernung 3 der Abscissenachse parallel gezogene Linie halbiert wird.

$f' = \pm\sqrt{x-3} \pm \frac{x-8}{2}(x-3)^{-\frac{1}{2}}$. Da f' für $x = 3$ unendlich ist, so steht die Tangente in dem zu $x = 3$ gehörigen Punkte senkrecht auf der Abscissenachse. f' wird $= 0$ für $x = 4\frac{2}{3}$. Da für diesen Wert von x f'' für die obere Hälfte negativ, für die untere positiv ist, so findet **für den zu $x = 4\frac{2}{3}$ gehörigen Punkt der oberen Hälfte ein Maximum, der unteren Hälfte ein Minimum statt.**

Sechster Abschnitt.

Differentiation verwickelter Funktionen zweier Veränderlichen.

§ 30. Sei $F(x, y) = 0$ eine verwickelte Funktion der beiden Veränderlichen x und y. Denkt man sich diese Gleichung auf y reducirt, so ist y eine f_x, daher muß, wenn x sich um dx ändert, y sich um ein davon abhängiges dy ändern, welches gleich $f^1{}_x\, dx$ ist. Die beiden zusammengehörigen Werte $x+dx$ und $y+dy$ müssen dann wieder die Gleichung $F(x+dx, y+dy) = 0$ identisch machen; es ist also $F(x+dx, y) = 0$, wenn y das neue zu $x+dx$ gehörige y bezeichnet.

Nun ist aber $F(x+dx, y) = F(x, y) + F^1{}_x(x, y)\, dx$, worin $F^1{}_x$ den ersten Differentialquotienten der nach x diffe-

Digitized by Google

rentiierten Funktion F bezeichnet. Überall ist statt y zu setzen $y+dy$, daher

$$F(x+dx, y+dy) = F(x, y+dy) + F'_x(x, y+dy)\,dx.$$

Nun ist $F(x, y+dy) = F + F'_y\,dy$.

$F'_x(x, y+dy) = F'_x + F''_{x,y}\,dy$, daher

$F(x+dx, y+dy) = F + F'_y\,dy + F'_x\,dx + F''_{x,y}\,dx\,dy$

oder, da der Ausdruck links und das erste Glied rechts $= 0$, und das letzte Glied rechts eine unendlich kleine Größe zweiten Grades ist, $\mathbf{F'_y \cdot dy + F'_x \cdot dx = 0}$.

Man findet also den Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ einer $F(x, y) = 0$, indem man die Funktion erst nach y und dann nach x differentiiert, und die Summe beider Differentiale gleich Null setzt.

Beispiele: 1. $y^2 - 2xy - 3x^2 - 4 = 0$

$$2y\,dy - 2x\,dy - 2y\,dx - 6x\,dx = 0.$$

$$(y-x)\,dy - (3x+y)\,dx = 0, \text{ daher } \frac{dy}{dx} = \frac{3x+y}{y-x}.$$

Da y doppelwertig ist, (weil aus der gegebenen Gleichung folgt $y = x \pm \sqrt{1+x^2}$), so ist $\frac{dy}{dx} = 1 \pm \frac{4x}{\sqrt{1+x^2}}$.

2. $x^4y^3 - e^y - x^4 + 7 = 0$.

$$3x^4y^2\,dy - e^y\,dy + 4y^3x^3\,dx - 4x^3\,dx = 0$$

$$(3x^4y^2 - e^y)\,dy + (4y^3x^3 - 4x^3)\,dx = 0$$

$$dy = \frac{4x^3 - 4x^3y^3}{3x^4y^2 - e^y}\,dx.$$

§ 31. Allgemein erhält man aus einer verwickelten Funktion zweier Veränderlichen den zweiten Differentialquotienten $\frac{d^2y}{dx^2}$ wie folgt:

Aus $F(x, y) = 0$ folgt durch Differentiieren

(1) ..... $F'_x\,dx + F'_y\,dy = 0$ für jeden Wert von x, daher auch das Differential des Ausdrucks links $= 0$ sein muß.

Digitized by Google

Es sind aber F'x, F'y und dy Funktionen von x, während dx als konstant anzusehen ist; daher

$$(F''_{x,x}\cdot dx^2 + F''_{x,y}\,dx\,dy) + (F''_{y,x}\,dx\,dy + F''_{y,y}\,dy^2 + F'y\cdot d^2y) = 0.$$

$$(2)\ldots\ldots F''_{x,x} + F''_{x,y}\frac{dy}{dx} + F''_{y,x}\frac{dy}{dx} + F''_{y,y}\frac{dy^2}{dx^2} + F'y\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

Hierin ist für $\frac{dy}{dx}$ sein Wert aus (1) zu substituieren.

Beispiele: 1. Aus $y^2 - 2xy - 3x^2 - 4 = 0$ folgt

$$y\,dy - x\,dy - 3x\,dx - y\,dx = 0 \text{ für jedes } x.$$

Daher auch das Differential des Ausdrucks links = 0 sein muß. Im Ausdrucke links sind aber y und dy Funktionen von x, während dx als konstant anzusehen ist. Daher erhält man durch nochmaliges Differentiieren

$$dy^2 + y\,d^2y - dx\,dy - x\,d^2y - 3dx^2 - dx\,dy = 0$$
$$dy^2 + (y-x)\,d^2y - 2\,dx\,dy - 3dx^2 = 0$$
$$(y-x)\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + \frac{dy^2}{dx^2} - 3 = 0.$$

Diese Gleichung ergiebt die Beziehung zwischen x, y und dem ersten und zweiten Differentialquotienten.

Wenn man nun $\frac{d^2y}{dx^2}$ als Funktion von x und y darstellen will, so muß der Wert von $\frac{dy}{dx}\left(=\frac{3x+y}{y-x}\right)$ substituiert werden.

2. $y^3 - 3xy + x^3 = 0$ (Gleichung für das kartesische Blatt.)

$$3y^2\,dy - 3x\,dy - 3y\,dx + 3x^2\,dx = 0$$
$$y^2\,dy - x\,dy - y\,dx + x^2\,dx = 0$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - x^2}{y^2 - x}.$$

Für x = 0 ist auch y = 0. Da nun $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$ wird, so ist nach § 17 der wahre Wert

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dx} - 2x}{2y\frac{dy}{dx} - 1}, \text{ woraus}$$

Digitized by Google

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1\pm\sqrt{1-4xy}}{2y}=\frac{1\pm(1-2xy-\ldots.)}{2y}.$$

Für das obere Vorzeichen ist $\frac{dy}{dx}$ für $x=0$ u. $y=0$ unendlich, für das untere Vorzeichen $=0$. Im Anfangspunkte der Kurve, der ein Doppelpunkt ist, steht also die eine Tangente senkrecht auf der Abscissenachse, die andere Tangente fällt mit der Abscissenachse zusammen.

Der erste Differentialquotient wird 0 für $y-x^2=0$, oder $y=x^2$. Wird dieser Wert in die gegebene Gleichung substituiert, so ist $x^6-2x^3+x^3=0$

$x^6-2x^3=0$, also $x=0$ und $\sqrt[3]{2}$, mithin

$y=0$ und $\sqrt[3]{4}$.

Für $\left.\begin{matrix}x=\sqrt[3]{2}\\ y=\sqrt[3]{4}\end{matrix}\right\}$ wird also $\frac{dy}{dx}=0$. Um zu erkennen, ob der Kurvenpunkt, dessen Abscisse $\sqrt[3]{2}$ ist, ein Maximum oder Minimum ist, muß $\frac{d^2y}{dx^2}$ gefunden werden. Differentiiere daher obige Gleichung

$y^2\,dy-x\,dy-y\,dx+x^2dx=0$, so ist

$2y\,dy^2+y^2d^2y-dy\,dx-xd^2y-dy\,dx+2x\,dx^2=0.$

$(y^2-x)\frac{d^2y}{dx^2}-2\left(\frac{dy}{dx}\right)+2y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2x=0$. Es ist aber für den zu untersuchenden Punkt $\frac{dy}{dx}=0$, daher

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-2x}{y^2-x}=\frac{-2\sqrt{2}}{\sqrt[3]{16}-\sqrt{2}}=-2,\text{ also negativ;}$$

daher findet ein Maximum statt.

Digitized by Google

Siebenter Abschnitt.

A. Differentiation der Funktionen zweier oder mehrerer absolut Veränderlichen.

§ 32. Es sei z eine Funktion der beiden absolut Veränderlichen x und y, welche ganz unabhängig von einander sind, z. B. $z = f(x, y)$ die Gleichung einer krummen Fläche.

Im allgemeinen wird z sich ändern, wenn x oder y oder beide zugleich sich ändern. Bezeichne die Änderung von z, welche durch Änderung von x erfolgt, mit $\underset{x}{\triangle} z$, diejenige, welche durch Änderung von y erfolgt, mit $\underset{y}{\triangle} z$, und diejenige, welche durch Änderung von x und y erfolgt, mit $\triangle z$. Ändert sich erst x um $\triangle x$, so ist

$$z + \underset{x}{\triangle} z = f(x+\triangle x, y) = f(x, y) + f'_x(x, y)\triangle x + f''_x(x,y)\frac{\triangle x^2}{2!} \ldots.$$

Ändert sich hierin noch y um $\triangle y$, so ist

$$(1) \ldots. z + \triangle z = f(x, y+\triangle y) + f'_x(x, y+\triangle y)\triangle x + f''_x(x, y+\triangle y)\frac{\triangle x^2}{2!} \ldots.$$

Hierin ist jetzt x konstant. Nach dem Taylorschen Satze ist nun

$$f(x, y+\triangle y) = f(x, y) + f'_y \triangle y + f''_y \frac{\triangle y^2}{2!} \ldots.$$

$$f'_x(x, y+\triangle y) = f'_x + f''_{x,y}\triangle y + f'''_{x,y,y}\frac{\triangle y^2}{2!} \ldots.$$

$$f''_y(x, y+\triangle y) = f''_{x,x} + f'''_{x,x,y}\triangle y + f^{IV}_{x,x,y,y}\frac{\triangle y^2}{2!} \ldots$$

daher nach Substitution in (1)

Digitized by Google

$$z + \Delta z = \begin{cases} f + f'_y \Delta y + {}''f_{y,y} \dfrac{\Delta y^2}{2!} + A \dfrac{\Delta y^3}{3!} \ldots . \\ + f'_x \Delta x + f''_{x,y} \Delta x \Delta y + B \Delta x \Delta y^2 \ldots \\ + f''_{x,x} \dfrac{\Delta x^2}{2!} + C \Delta x^3 \Delta y \ldots \end{cases}$$

daher die totale Differenz $\Delta x = f'_x \Delta x + f'_y \Delta y + f''_{x,x} \dfrac{\Delta x^2}{2!}$

$$+ f''_{x,y} \Delta x \Delta y + f''_{y,y} \frac{\Delta y}{2!} \ldots .$$

§ 33. Wächst in der Funktion $z = f(x, y)$ die Veränderliche x um dx, so ist $f(x + dx, y) = f(x, y) + f'_x\, dx$, worin f'_x eine Funktion von x u. y.

Wächst in $f(x + dx, y)$ die veränderliche y um dy, so ist $f(x + dx, y + dy) = f(x + dx, y) + f'y\,(x + dx, y)\, dy$, worin f'y eine Funktion von $(x + dx)$ u. y, also $= f'_y + M\, dx$. Daher ist $f(x + dx, y + dy) = f(x, y) + f'_x\, dx + (f'_y + M\, dx)\, dy$. Also, da $M\, dx\, dy$ als unendlich kleine Größe zweiten Grades ausgelassen werden kann,

das totale Differential $dz = f'_x\, dx + f'_y\, dy$.

Wächst in der Funktion $z = f(x, y, v)$ die Veränderliche x um dx, so ist $f(x + dx, y, v) = f(x, y, v) + f'_x\, dx$, worin f'_x eine Funktion von x, y, v.

Wächst in $f(x + dx, y, v)$ die Veränderliche y um dy, so ist $f(x + dx, y + dy, v) = f(x + dx, y, v) + f'y\,(x + dx, y, v)\, dy$, worin f'_y eine Funktion von $x + dx$, y, v, also $=$

$$f'_y\,(x, y, v) + M \cdot dx.$$

Wächst in $f(x + dx, y + dy, v)$ die Veränderliche v um dv, so ist $f(x + dx, y + dy, v + dv) = f(x + dx, y + dy, v) + f'_v\,(x + dx, y + dy, v)\, dv$, worin f'_v eine Funktion von

$$x + dx,\ y + dy,\ v,$$

$$\text{also} = f'_v\,(x + dx, y + dy, v) + N\, dy$$
$$= f'_v\,(x, y, v) + P\, dx + N\, dy.$$

Digitized by Google

Subſtituiert man die gefundenen Werte von
$f(x+dx, y+dy, v)$ und $f(x+dx, y, v)$, ſo reſultiert
$f(x+dx, y+dy, v+dv) = f(x, y, v) + f'_x\,dx + (f'_y + M dx)\,dy + (f'_v + P\,dx + N\,dy)\,dv$, daher

das totale Differential $dz = f'_x\,dx + f'_y\,dy + f'_v\,dv$.

Beiſpiele: 1. $z = 2x^2y - 3xy^2 + 4$. Wächſt x um dx, y um dy ſo iſt
$dz = (4xy - 3y^2)\,dx + (2x^2 - 6xy)\,dy$,

2. $z = x + y^2 + v^3$.
$dz = dx + 2y\,dy + 3v^2\,dv$.

3. $z = 3xy^2 + 4yv^2 + 5x^2v$.
$dz = (3y^2 + 10xv)\,dx + (6xy + 4v^2)\,dy + (8yv + 5x^2)\,dv$.

4. $z = 3x^3y^2v - 4x^2y^2v^2 + 5x\,yv^4 + 6$.
$dz = (9x^2y^2v - 8xy^2v^2 + 5yv^4)\,dx + (6x^3yv - 8x^2yv^2 + 5xv^4)\,dy + (3x^3y^2 - 8x^2y^2v + 20xy\,v^3)\,dv$.

5. $z = x^m\,y^n$.

6. $z = \frac{1}{x}\sqrt{x^2+y^2}$.

7. $z = \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{x}{y}\right)$.

§ 34. Sind in einer verwickelten Funktion $f(x, y, z) = 0$ x u. y die abſolut Veränderlichen, z die von ihnen abhängige Veränderliche, ſo läßt ſich durch eine ähnliche Betrachtung wie in § 30 zeigen, daß

$$F'_x\,dx + F'_y\,dy + F'_z\,dz = 0.$$

Beiſpiel: $x^2+y^2+z^2=r^2$ (Gl. der Kugeloberfläche).

Löſung 1. $x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0$.

$$dz = -\frac{(x\,dx + y\,dy)}{x}.$$

Löſung 2. $z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$, daher nach § 32.

Digitized by Google

$$dz = f'_x\,dx + f'_y\,dy \quad \Big| \quad f'_x = -\frac{x\,dx}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}} = -\frac{x\,dx}{z}$$

$$f'_y = -\frac{y\,dy}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}} = -\frac{y\,dy}{z}$$

$$dz = -\frac{(x\,dx + y\,dy)}{z}.$$

§ 35. Aufgabe. Die Gleichung der durch den Punkt P einer krummen Fläche $f(x, y, z) = 0$ gehenden Tangentialebene zu finden.

Lösung. Die Koordinaten des Punktes P seien x_0, y_0, z_0. Wächst nur x_0 um $\triangle x$, z_0 um $\triangle z$ und bleibt y konstant, so ist dadurch Punkt P, der krummen Fläche bestimmt. Wächst nur y_0 um $\triangle y$, z_0 um $\triangle z$ und bleibt x konstant, so ist dadurch Punkt $P_{,,}$ der Fläche bestimmt.

Die Gl. der durch P P, $P_{,,}$ gehenden Ebene sei $Z = AX + BY + C$ dann ist

$$z_0 = A\,x_0 + By_0 + C$$

$$z_0 + \underset{x}{\triangle} z = A\,(x_0 + \triangle x) + B\,y + C$$

$$z_0 + \underset{y}{\triangle} z = A\,x_0 \qquad + B\,(y_0 + \triangle y) + C.$$

Aus diesen drei Gleichungen ergeben sich $A = \frac{\underset{x}{\triangle} z}{\triangle x}$, $B = z\frac{\underset{y}{\triangle} z}{\triangle y}$, $C = z - \frac{\underset{x}{\triangle} z}{\triangle x} - \frac{\underset{y}{\triangle} z}{\triangle y}$. Werden $\triangle x$ u. $\triangle y$ unendlich klein, so kann das gekrümmte Flächenstück P P, $P_{,,}$ als eben angesehen werden und fällt dann mit der gesuchten Ebene $Z = AX + BY + C$ zusammen. Dann sind A und B die partialen Differentialquotienten $\frac{dz}{dx}$ (oder $f'x$) und $\frac{dz}{dy}$ (oder $f'y$). Daher ist die Gl. der gesuchten Tangentialebene $Z - z = f'_x\,(X - x) + f'_y\,(Y - y)$, worin für x, y, z die Koordinaten des gegebenen Punktes P zu setzen sind.

Beispiel. $z^2 - x^2 - y^2 - r^2 = 0$. (Gl. der Kugeloberfläche).

Differentiiere nach x, so ist $2z\,dz - 2x\,dx = 0$, also $f'_x = -\frac{x}{z}$.

Digitized by Google

Differentiiere nach y, so ist $2z\,dz - 2y\,dy = 0$, also $f'_y = -\frac{y}{z}$.

Daher ist die Gl. der Tangentialebene durch den Punkt x, y, z der Kugeloberfläche:

$$Z - z = -\frac{x}{z}(X-x) - \frac{y}{z}(Y-y) \text{ oder}$$
$$x(X-x) + y(Y-y) + z(Z-z) = 0.$$

Zusatz. Für $x=0$, $y=0$, also $z=r$ ist die Gl. der Tangentialebene $r(Z-r)=0$ oder $Z=r$, also unabhängig von x u. y, also der Ebene der x, y im Abstande r parallel.

B. Maxima und Minima der Funktionen mehrerer absolut Veränderlichen.

§ 36. $z=f(x, y)$ ist ein Maximum (oder Minimum) für diejenigen Werte x_0 und y_0, für welche gleichzeitig

1) $f'x$ und $f'y = 0$.
2) $f''x$ und $f''y$ beide negativ (oder beide positiv).
3) $f''x \cdot f''y > (f''_{x,y})^2$.

Beweis. Es ist $f(x+\Delta x, y+\Delta y) = f(x, y) + f'_x\,\Delta x + f'_y\,\Delta y + f''_x\frac{\Delta x^2}{2} + f''_y\frac{\Delta y^2}{2} + f''_{x,y}\Delta x\Delta y \ldots$.

Δx u. Δy können so klein angenommen werden, daß $f'_x\,\Delta x + f'_y\Delta y$ größer ist, als die Summe aller folgenden Glieder. Soll nun z für x_0 u. y_0 ein Maximum (oder Minimum) sein, so müssen **f'_x und f'_y beide gleich Null sein.**

Wären nämlich beide +, so würde z wachsen für $+\Delta x$ u. $+\Delta y$, abnehmen für $-\Delta x$ u. $-\Delta y$;
wären beide −, so würde z abnehmen für $+\Delta x$ u. $+\Delta y$, wachsen für $-\Delta x$ u. $-\Delta y$;
wäre f'_x pos., f'_y negativ, so würde z wachsen für $+\Delta x$ u. $-\Delta y$, abnehmen für $-\Delta x$ u. $+\Delta y$

Demnach ist beim Maximum (u. Minimum):

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) = f(x, y) + f''_x\frac{\Delta x^2}{2} + f''_y\frac{\Delta y^2}{2} + f''_{x,y}\Delta x\,\Delta y \ldots.$$

Digitized by Google

und zwar kann ein **Maximum** nur dann stattfinden, wenn

$$f''_x \frac{\Delta x^2}{2} + f''_y \frac{\Delta y^2}{2} + f''_{x,y} \Delta x \Delta y \text{ negativ ist;}$$

also **wenn f_x u. f_y beide negativ** sind.

Wäre nämlich f''_x + und f''_y −, so wäre für $\Delta y = 0$ die Summe positiv, und wäre f''_x − und f''_y +, „ „ „ $\Delta x = 0$ „ „ „

Ein Minimum kann nur dann stattfinden, wenn **f_x u. f_y beide positiv** sind.

Für ein Maximum muß noch $f''_x \Delta x^2 + f''_y \Delta y^2 + 2f''_{x,y} \Delta x \Delta y$ negativ sein, es muß also, wenn für $f''_x \Delta x^2 + 2f''_{x,y} \Delta x \Delta y$ der Wert $f''_x \left(\Delta x + \frac{f''_{x,y}}{f''_x} \Delta y\right)^2 - \frac{(f''_{x,y})^2}{f''_x} \Delta y^2$ substituiert wird, $f''_x \left(\Delta x + \frac{f''_{x,y}}{f''_x} \Delta y\right)^2 + f''_y - \frac{(f''_{x,y})^2}{f''_x} \Delta y^2$ negativ sein; diese Bedingung wird aber, da beim Maximum f''_x u. f''_y beide negativ sind, erfüllt, wenn

$$f''_y - \frac{(f''_{x,y})^2}{f''_x} \text{ Null oder negativ ist, also wenn}$$

$$f''_x f''_y \geq (f''_{x,y})^2 \text{ ist.}$$

Für ein Minimum muß $f''_x \left(\Delta x + \frac{f''_{x,y}}{f''_x} \Delta y\right)^2 + \left[f''_y - \frac{(f''_{x,y})^2}{f''_x}\right] \Delta y^2$ positiv sein.

Diese Bedingung wird, da beim Minimum f''_x u. f''_y beide positiv sind, erfüllt, wenn

$$f''_x f''_y \geq (f''_{x,y})^2 \text{ ist.}$$

Anmerk. Gewöhnlich erkennt man aus der Funktion selbst, ob ein Maximum oder Minimum stattfindet, und hat dann nicht nötig, zu prüfen, ob die Bedingungen 2) u. 3) erfüllt sind.

§ 37. Übungsaufgaben.

1. Wann wird $z = x^2 + xy + y^2 - 3x + 3y$ ein Maximum oder Minimum?

Lösung. f'_x od. $\frac{dz}{dx} = 2x + y - 3 = 0$

f'_y od. $\frac{dz}{dy} = x + 2y + 3 = 0$

giebt $x = 3$, $y = -3$.

Da $f''_x = 2$, $f''_y = 2$, $f_{x,y} = 1$, so ist $f''_x f''_y > (f_{x,y})^2$, daher wird z ein Minimum für $x = 3$ u. $y = -3$.

Digitized by Google

2. Die Zahl 9 in drei Teile x, y, z zu zerlegen, so daß das Produkt $x^2 y^3 z^4$ ein Maximum wird.

Lösung. $x^2 y^3 (9-x-y)^4$ soll ein Maximum werden.

1) ..... $f'_x = 2xy^3(9-x-y)^4 - x^2y^3 \cdot 4(9-x-y)^3 = 0$

2) ..... $f'_y = 3x^2y^2(9-x-y)^4 - x^2y^3 \cdot 4(9-x-y)^3 = 0$

Da weder x, noch y, noch 9−x−y gleich 0 sein können, so dividiere 1) durch $2xy^3(9-x-y)^3$ und 2) durch $x^2y^2(9-x-y)^3$; dann ist

$$\left.\begin{matrix}(9-x-y)-2x=0\\ 3(9-x-y)-4y=0\end{matrix}\right\} \text{ oder } \left.\begin{matrix}9-3x-y=0\\ 27-3x-7y=0\end{matrix}\right\},$$

daher $x=2$, $y=3$, $z=4$.

Für diese drei Teile von 9 wird $x^2y^3z^4$ ein Maximum, da von einem Minimum nicht die Rede sein kann.

Anmerk. **Soll die Zahl a in drei solche Teile zerlegt werden, daß $x^2y^3z^4$ ein Maximum wird**, so ergeben sich als solche $\frac{2}{9}a$, $\frac{3}{9}a$, $\frac{4}{9}a$.

3. Eine Linie a in drei solche Teile x, y, z zu teilen, daß das daraus konstruierte Dreieck ein Maximum wird.

Lösung. $\sqrt{\frac{a}{2}\left(\frac{a}{2}-x\right)\left(\frac{a}{2}-y\right)\left(x+y-\frac{a}{2}\right)}$

soll ein Maximum sein; dies ist offenbar der Fall, wenn

$\frac{a}{2}\left(\frac{a}{2}-x\right)\left(\frac{a}{2}-y\right)\left(x+y-\frac{a}{2}\right)$ ein Maximum ist.

$$f'_x = -\left(\frac{a}{2}-y\right)\left(x+y-\frac{a}{2}\right)+\left(\frac{a}{2}-x\right)\left(\frac{a}{2}-y\right) = 0$$

$$f'_y = -\left(\frac{a}{2}-x\right)\left(x+y-\frac{a}{2}\right)+\left(\frac{a}{2}-x\right)\left(\frac{a}{2}-y\right) = 0$$

$$\left(\frac{a}{2}-y\right)\left(a-2x-y\right) = 0$$

$$\left(\frac{a}{2}-x\right)\left(a-x-2y\right) = 0$$

$\frac{a}{2}-y$ kann nicht 0 sein, denn dann wäre auch $\frac{a}{2}x-0$ |

$\frac{a}{2}-x$ " " " " " " " " $\frac{a}{2}-y=0$ |

und somit wäre der dritte gesuchte Teil = 0.

Digitized by Google

Es ist also zu setzen $a-2x-y=0$

$a-x-2y=0$, woraus $x=a/3$, $y=a/3$, daher $z=a/3$.

Da nun für diese Werte

$f''_x = -\frac{1}{3}a$
$f''_y = -\frac{1}{3}a$
$f''_{x,y} = -\frac{1}{6}a$

und $f''_x \cdot f''_y > (f''_{x,y})^2$, so findet ein Maximum statt.

Von allen Dreiecken gleichen Umfangs hat also das gleichseitige den größten Inhalt.

4. Welche Dimensionen hat dasjenige gerade Parallelepipedum, welches von allen Parallelepipeden gleichen Inhalts (V) die kleinste Oberfläche hat?

Lösung. Werden die Dimensionen des Parallel. mit x, y, z $\left(=\frac{V}{xy}\right)$ bezeichnet, so ist die Oberfläche, welche ein Minimum sein soll,

$$2\left(xy+\frac{V}{x}+\frac{V}{y}\right).$$

$f'_x = 2(y-V_x^{-2}) = 0$
$f'_y = 2(x-V_y^{-2}) = 0$

Hieraus $x = \sqrt[3]{5}$, $y = \sqrt[3]{5}$, $z = \sqrt[3]{5}$

Da für diese Werte $f''_x = 4$, $f''_y = 4$, $f''_{x,y} = 2$ so hat **von allen Parallelepipeden gleichen Inhalts der Kubus die kleinste Oberfläche.**

5. Innerhalb eines geg. Dreiecks wird ein solcher Punkt P gesucht, daß die Summe der von ihm nach den Ecken gezogenen Strahlen ein Minimum ist.

Lösung. Bezeichne PB, PA, PC mit x, y, z; ferner $\angle$ PBC mit ξ und $\angle$ PBA mit $\beta - \xi$, so ist

$y^2 = c^2 + x^2 - 2cx \cdot \cos(\beta - \xi)$

$z^2 = a^2 + x^2 - 2ax \cdot \cos \xi$; daher ist zu untersuchen, wann

$x + \sqrt{c^2+x^2-2cx\cos(\beta-\xi)} + \sqrt{a^2+x^2-2ax\cos\xi}$ ein Minimum ist.

$$f'_x = 1 + \frac{x-c\cos(\beta-\xi)}{y} + \frac{x-a\cos\xi}{z} = 0$$

$$f'_\xi \quad \frac{cx\sin(\beta-\xi)}{y} - \frac{ax\sin\xi}{z} = 0$$

Digitized by Google

Fällt man AD ⊥ BP, BE ⊥ CP, so ist

$c \cdot \cos(\beta - \xi) = BD$. $\quad a \cdot \cos \xi = BE$,

$c \cdot \sin(\beta - \xi) = AD$. $\quad a \cdot \sin \xi = CE$, daher

1) $\ldots\ldots 1 + \frac{x - BD}{y} + \frac{x - BE}{z} = 0$ oder $1 - \frac{PD}{y} - \frac{PE}{z} = 0$

2) $\ldots\ldots \frac{AD}{y} - \frac{CE}{z} = 0.$

Aus 1) folgt $\frac{PD}{y} + \frac{PE}{z} = 1$, oder $\cos APD + \cos EPC = 1$.

Aus 2) folgt $\frac{AD}{y} = \frac{CE}{z}$, oder $\sin APD = \sin EPC$,

daher $\angle APD = EPC$, daher

$\cos APD = \frac{1}{2}$, oder $\angle APD = 60^0$
$\cos EPC = \frac{1}{2}$, oder $\angle EPC = 60^0$. } Der gesuchte Punkt P liegt demnach so, daß **jeder der Winkel APB, BPC, CPA = 120⁰** ist.

Zusatz. Konstruiert man über zwei Seiten des geg. △ABC gleichseitige Dreiecke, und um jedes einen Kreis, so schneiden sich beide Kreise im gesuchten Punkte P.

C. Maxima und Minima mit Nebenbedingungen.

§ 38. Wenn $z = F(x, y)$ die Gleichung einer krummen Fläche ist, so kann gefragt werden, für welche aus $y = f(x)$ sich ergebenden zusammengehörigen Werte von x u. y z ein Maximum oder Minimum wird, oder mit anderen Worten: Wenn man in allen Punkten der in der Ebene der x, y gezogenen Kurve $y = f(x)$ Lote zur Ebene der x, y errichtet, welche die krumme Fläche $z = F(x, y)$ schneiden, diejenigen Durchschnitte zu bestimmen, welche Maxima oder Minima sind.

Es sei z. B. $z = x^3 - y^2$ und $y = 10 + \frac{3}{2}x$.

Für x =	− 3	− 2½	− 2	...	0	....	3½	4	4½	5....ist
y =	5½	6¼	7		10		15¼	16	16¾	17½..und
z =	−57¼	−54 1/16	−57	...	−100	....	−189 1/16	−192	−189 7/16	−181¼...

Digitized by Google

Es erhält z für die verschiedenen zusammengehörigen Werte von x u. y im allgemeinen verschiedene Werte. Um nun zu bestimmen, für welchen Wert $x^3 - y^2$ oder $x^3 - (10 + \frac{3}{2}x)^2$ ein Maximum oder Minimum wird, setze

$f'_x = 3x^2 - 3(10 + \frac{3}{2}x)$ oder $3x^2 - \frac{9}{2}x - 30 = 0$.

Hieraus ergiebt sich $x = 4$ u. $-2\frac{1}{2}$.

$f'_x = 6x - \frac{9}{2}$ ist für $x = 4$ positiv, für $x = -2\frac{1}{2}$ negativ.

Daher ist z ein **Maximum für** $x = 2\frac{1}{2}$ und das zugeh. $y = 6\frac{1}{4}$,
ein **Minimum für** $x = 4$, „ „ „ $y = 16$.

Anmerk. Man kann diese Werte auch finden, ohne den Wert von y in die Gl. für z zu substituieren. Differentiiert man nämlich (nach § 32) die gegebenen Gleichungen $z - x^3 + y^2 = 0$,

$$y - \frac{3}{2}x - 10 = 0, \text{ so ist}$$

1) $\quad dz - 3x^2\,dx + 2y\,dy = 0$

2) $\quad dy - \frac{3}{2}\,dx = 0.$

$\frac{dz}{dx}$ oder $3x^2 - 2y\frac{dy}{dx}$ ist $= 0$ zu setzen.

Aus 2) folgt $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}$, daher $3x^2 - 3y = 0$ oder

$x^2 - y = 0$ für das Max. oder Minimum.

Daher mit Hilfe der zweiten geg. Gleichung, die ja ebenfalls für das gesuchte x gilt, für welches z ein Maximum oder Minimum ist,

$x^2 - \frac{3}{2}x = 10$, woraus $x = -2\frac{1}{2}$ und 4.

§ 39. Übungsaufgaben.

1. Die Höhe y und den Radius x eines offenen Cylinders zu bestimmen, dessen Oberfläche f bei geg. Inhalt v ein Minimum ist.

Lösung. (1) . . . $f = 2x\pi y + x^2\pi$

(2) . . . $y = \frac{v}{\pi}x^{-2}$.

Setze $df = 0$, so ist $(y + x)\,dx + x\,dy = 0$

Digitized by Google

$(y+x)\,dx - x\cdot\frac{v}{\pi}2x^{-3}\,dx = 0$

$y + x - \frac{2v}{\pi}x^{-2} = 0$. Nun ist aber (2)

$2y - \frac{2v}{\pi}x^{-2} = 0$; daher $y - x = 0$.

Es ist also die Oberfläche eines offenen Cylinders vom Inhalte v ein Minimum, wenn $y = x = \sqrt[3]{\frac{v}{\pi}}$.

2. Welches aus den vier Seiten a, b, c, d konstruierbare Viereck hat den größten Inhalt?

Lösung. Sei ξ der $\angle$ zwischen a u. b, φ der dadurch bestimmte $\angle$ zwischen c u. d, so ist der Inhalt $f = \frac{ab}{2}\sin\xi + \frac{cd}{2}\sin\varphi$.

Ferner ist, da die Diagonale sich auf zwei Arten ausdrücken läßt,

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\xi = c^2 + d^2 - 2cd\cos\varphi.$$

Da die Elimination von φ sehr umständlich wäre, so eliminiere $d\varphi$

Es ist (1) ..... $df = 1/2\,ab\cos\xi + d\xi + 1/2\,cd\cos\varphi\,d\varphi = 0$

(2) ..... $2ab\sin\xi\,d\xi = 2cd\sin\varphi\,d\varphi.$

$$ab\cos\xi\,d\xi + cd\cos\varphi\,d\varphi = 0$$
$$ab\sin\xi\,d\xi - cd\sin\varphi\,d\varphi = 0$$

$$ab(\cos\xi\sin\varphi + \sin\xi\cos\varphi)\,d\xi = 0.$$
$$\sin(\xi+\varphi) = 0, \text{ daher } \xi + \varphi = 180^0.$$

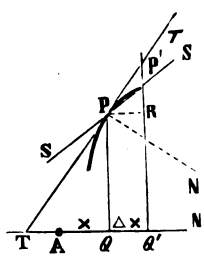
Das gesuchte Viereck ist daher ein Kreisviereck, dessen gegenüberliegende Winkel ξ u. φ sich aus (2) ergeben. Da nämlich $\cos\varphi = -\cos\xi$, so ist $\cos\xi = \frac{a^2+b^2-(c^2+d^2)}{2(ab+cd)}$.

Digitized by Google

Achter Abschnitt.

Von den Tangenten und der Krümmung der Kurven.

§ 40. Es sei $y = f(x)$ die Orthogonalgleichung einer Kurve. Wächst $AQ = x$ um $QQ^I = \Delta x$, so ändert sich $PQ = y$ um $P'R = \Delta y$, und es ist nach dem Taylorschen Satze:



$$y + \Delta y = y + f'\Delta x + f'' \frac{\Delta x^2}{2!} - \ldots\ldots$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f' + f'' \frac{\Delta x}{2!} \ldots\ldots$$

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ist die Tang. des Winkels, den die Sekante SS mit der Abscissenachse bildet. Je kleiner Δx, um so mehr nähert sich SS der Tangente; für $\Delta x = dx = o$ fällt sie mit dieser zusammen, daher wird der Winkel, welchen die Tangente mit der Abscissenachse bildet, durch $\mathbf{tang}\,\tau = \frac{dy}{dx}$ oder $\operatorname{cotg}\tau = \frac{dx}{dy}$ bestimmt.

Für die Tangente, Subtangente, Normale, Subnormale ergeben sich folgende Formeln:

Tangente $TP = y\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$	Norm. $PN = y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$
Subtang. $TQ = y\left(\frac{dx}{dy}\right)$	Subn. $QN = y\left(\frac{dy}{dx}\right)$.

Beispiele.

1. Die Tangente, Subtangente, Normale, Subnormale der Parabel $y = \sqrt{ax}$ zu bestimmen.

Digitized by Google

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{x}}$ wird für $x = o$ unendlich, daher ist die Tangente im Scheitel der Parabel senkrecht zur Abcissenachse.

Für den Punkt, dessen Abscisse x ist, ist

die Tangente $= \sqrt{ax + 4x^2}$	die Normale $= \sqrt{ax + \frac{a^2}{4}}$
die Subtang. $= 2x$	die Subnorm. $= \frac{a}{2}$.

2. Die Tangente, Subtangente, Normale, Subnormale des Kreises $y^2 = r^2 - x^2$ zu bestimmen.

$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ wird für $x = o$ zu Null,

daher ist die Tangente in den Punkten des Kreises, deren Abscisse o, parallel der Abscissenachse.

Für $x = \pm r$ wird $\frac{dy}{dx} = \infty$, daher die zugehörige Tangente senkrecht zur Abscissenachse.

Für $x = \pm \frac{r}{2}\sqrt{2}$ wird $\frac{dy}{dx} = \pm 1$, daher bildet die zugehörige Tangente mit der Abscissenachse einen Winkel von 45°.

Die Tangente $= \frac{y}{x} r$	die Normale $= r$
die Subtang. $= -\frac{y^2}{x}$	die Subnorm. $= -x$.

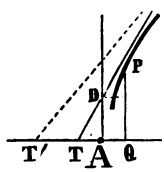
3. Für die Exponentiallinie $y = e^x$ ist

$\frac{dy}{dx} = e^x$. Für $x = o$ schneidet die Tangente die Abscissenachse unter einem Winkel von 45°.

Die Tangente $= \sqrt{1 + e^{2x}}$	die Normale $= e^x\sqrt{1 + e^{2x}}$
die Subtang. $= 1$	die Subnorm. $= e^{2x}$.

Digitized by Google

§ 41. Asymptote einer Kurve heißt diejenige Gerade, der sich die Kurve immer mehr nähert, ohne sie jemals zu erreichen. Die Asymptote kann daher als Tangente an einen unendlich weit entfernten Punkt der Kurve angesehen werden.



Ist D der Durchschnitt der Tangente mit der Ordinatenachse, T der mit der Abscissenachse, so drücke man

$$AT = y \cot\tau - x \text{ und}$$
$$AD = y - x \tan\tau$$

als Funktionen von x aus und untersuche, ob diese Strecken für $x = \infty$ endlich bleiben oder ∞ werden. Bleiben sie endlich, so giebt es eine Asymptote; werden sie unendlich, so giebt es keine Asymptote. Wird die eine Strecke endlich, die andere unendlich, so ist die Asymptote der einen Koordinatenachse parallel; werden beide Strecken gleich Null, so geht die Asymptote durch den Koordinatenanfangspunkt. In diesem Falle muß zur Bestimmung der Richtung der Asymptote $\tan\tau$ oder $\frac{dy}{dx}$ für $x = \infty$ gefunden werden.

Beispiele.

1. Für die Kurve $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^3}$ ist

$$\tan\tau = \frac{dy}{dx} = \frac{bx}{a}(x^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}}, \text{ daher}$$

$$AT = y \operatorname{cotg}\tau - x = -\frac{a^2}{x}.$$

$$AD = y - x \tan\tau = \frac{-ab}{\sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Sowohl AT als AD werden für $x = \infty$ zu Null. Daher geht die Asymptote durch den Koordinatenanfang.

$$\text{Da } \tan\tau = \frac{bx}{a\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{b}{a\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}} \text{ für } x = \infty \text{ gleich } \pm\frac{b}{a} \text{ wird, so}$$

ist hierdurch die Richtung der beiden Asymptoten bestimmt.

Digitized by Google

2. Für die Kurve $y = x + \frac{a^2}{4x} + a$ ist

$$\tan\tau = \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{a^2}{4x^2}, \text{ daher}$$

$$AT = y\,\mathrm{ctg}\,\tau - x = \frac{2ax}{x-a} = \frac{2a}{1-a/x}.$$

$$AD = y - x\tan\tau = \frac{2a^2}{x} + 2a.$$

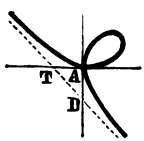
Für $x = \infty$ ist $AT = 2a$.

Für $y = \infty$ ist $x = 0$, daher $AT = 0$ und $AD = \infty$.

Anmerk. Um keine Asymptote zu verfehlen, ist in den Formeln für AT u. AD sowohl $x = \infty$, als $y = \infty$ zu setzen.

3. Für das kartesische Blatt $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ ist

$$\tan\tau = \frac{dy}{dx} = -\frac{x^2 - ay}{y^2 - ax}, \text{ daher}$$

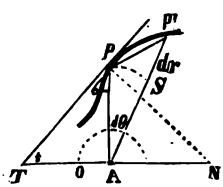


$$AT = y\,\mathrm{ctg}\,\tau - x = \frac{axy}{ay - x^2} = \frac{a}{a/x - x/y}$$

$$AD = y - x\tan\tau = -\frac{axy}{ax - y^2} = -\frac{a}{a/y - y/x}$$

Für $x = \infty$ ist $y = -\infty$, daher $AT = a$ und $AD = -a$; dadurch ist die Lage der Asymptote bestimmt. (Sie bildet mit der Abscissenachse einen $\angle$ von 135°).

§ 42. Es sei $r = f\theta$ die Polargleichung einer Kurve. Ändert sich θ um $\Delta\theta$ so ändert sich auch $AP = r$ um $SP' = \Delta r$ und es ist nach dem Taylorschen Satze



$$r + \Delta r = f\theta + \frac{dr}{d\theta}\Delta\theta + \frac{d^2r}{d\theta^2}\frac{\Delta\theta^2}{2!} \cdots\cdots$$

$$\frac{\Delta r}{\Delta\theta} = \frac{dr}{d\theta} + \frac{d^2r}{d\theta^2}\frac{\Delta\theta}{2!} \cdots\cdots$$

Da Bogen $PS = r\cdot\Delta\theta$, so ist

$$\frac{SP'}{SP} = \frac{1}{r}\cdot\frac{dr}{d\theta} + \frac{1}{r}\cdot\frac{d^2r}{d\theta^2}\cdot\frac{\Delta\theta}{2!} \cdots$$

Digitized by Google

Ist $\triangle\theta$ unendlich klein, $= d\theta$, so wird die Sekante PP' zur Tangente, und ist für diese $\mathbf{tang}\,\tau = \frac{1}{r}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)$. Nun ergeben sich leicht folgende Formeln:

die Tangente $= r\sqrt{1+r^2\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2}$	die Norm. $= \sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}$
die Subtang. $= r^2\left(\frac{d\theta}{dr}\right)$	die Subn. $= \left(\frac{dr}{d\theta}\right)$

Beispiele.

1. $r = \frac{a}{2\pi}\theta$ (archimedische Schraube).

$dr = \frac{a}{2\pi}d\theta$, daher tang $\tau = \frac{a}{2r\pi} = \frac{1}{\theta}$ und tang $\alpha = \theta$. Daher ist die tang des Winkels, den die Tangente mit dem Radiusvektor bildet, immer gleich dem Polarwinkel θ.

Für $\theta = o$ fällt die Tangente mit dem Radiusvektor zusammen.

Für $\theta = \infty$ steht die Tangente auf dem Radiusvektor senkrecht.

Tangente $= \frac{a}{2\pi}\theta\sqrt{1+\theta^2}$	Normale $= \frac{a}{2\pi}\sqrt{1+\theta^2}$
Subtang. $= \frac{a}{2\pi}\theta^2$	Subnorm. $= \frac{a}{2\pi}$.

2. $r = e^{\theta}$ (Exponential-Spirale).

$dr = e^{\theta}\cdot d_{\theta}$, daher tang $(90-\tau) = \frac{1}{r}\cdot e^{\theta} = 1$. Daher bildet die Tangente an die Exponentialspirale mit dem Radiusvektor stets einen Winkel von 45^0.

Tangente $= r\sqrt{2}$	Normale $= r\sqrt{2}$
Subtang. $= r$	Subnorm. $= r$.

Bei der Exponentialspirale sind also die Tangenten und Normalen einander gleich; ebenso die Subtangenten und Subnormalen.

§ 43. Wenn zwei Kurven $y = f_x$ und $y = \varphi_x$ für einen bestimmten Wert x_0 dasselbe y haben, so daß also für diesen Wert x_0 die Funktion $f_{x_0} = \varphi_{x_0}$ ist, so gehen beide Kurven durch denselben Punkt P_0. Ist nun für x_0 zugleich $f'_{x_0} = \varphi'_{x_0}$,

Digitized by Google

so haben beide Kurven im Punkte P_0 eine gemeinschaftliche Tangente; es findet dann zwischen den Kurven eine „**Berührung ersten Grades**" statt. Ist außerdem noch $f''_{x_0} = \varphi''_{x_0}$, so findet eine „Berührung zweiten Grades" statt 2c. Je mehr aufeinanderfolgende Differentialquotienten einander gleich sind, um so inniger schmiegen sich die beiden Kurven in der Nähe ihres gemeinsamen Punktes P_0 aneinander.

§ 44. Aufgabe. Gegeben ist die Parabel $y = \sqrt{x}$. Welche parabolische Linie $y = ax^3 + bx + c$ hat mit ihr eine möglichst innige Berührung im Punkte P_0 dessen Abscisse $x_0 = 4$.

Lösung.

$f = \sqrt{x}$	$\varphi = ax^3 + bx + c$
$f' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\varphi' = 3ax^2 + b$
$f'' = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$	$\varphi'' = 6ax.$

Da für x_0 (=4) $f = \varphi$ ist, so ist $2 = a \cdot 64 + b \cdot 4 + c$. Ferner ist

$$\frac{1}{4} = 3a \cdot 16 + b$$

$$\frac{1}{32} = 6a \cdot 4.$$

Hieraus $a = -\frac{1}{768}$, $b = \frac{5}{16}$, $c = \frac{5}{6}$; daher die gesuchte Kurve:

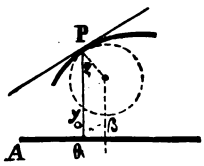
$$y = -\tfrac{1}{768}x^3 + \tfrac{5}{16}x + \tfrac{5}{6}.$$

Anmerk. Da die gesuchte parabolische Linie $y = ax^3 + bx + c$ nur drei zu bestimmende Koefficienten enthält, so kann für sie und $y = \sqrt{x}$ nur eine Berührung zweiten Grades gefordert werden. Hätte die gesuchte parabolische Linie die Form $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ haben sollen, so hätte für sie und die Parabel $y = \sqrt{x}$ eine Berührung III. Grades gefordert werden können.

§ 45. Erklärung. **Krümmungskreis** heißt derjenige Kreis, welcher mit einer Kurve $y = f_x$ in einem gegebenen Punkte derselben die möglichst innigste Berührung hat; **Krümmungsradius** heißt der Radius dieses Kreises.

Digitized by Google

§ 46. Aufgabe. Welches ist der Krümmungskreis für die Kurve $y = f_x$ im Punkte P, dessen Koordinaten x_0 u. y_0 sind.



Lösung. Seien α u. β die Koordinaten des Mittelpunktes des gesuchten Krümmungskreises, ϱ der Krümmungsradius, also
$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\varrho^2$ die Gl. des Krümmungskr.
Für x_0 ist zugleich
$y=f_x$ und $y=\beta+\sqrt{\varrho^2-(x-\alpha)^2}$

$$f'_x = -\frac{(x-\alpha)}{\sqrt{\varrho^2-(x-\alpha)^2}}$$

$$f''_x = -\frac{\varrho^2}{\sqrt{[\varrho^2-(x-\alpha)^2]^3}}$$

Aus diesen drei Bestimmungsgleichungen ergeben sich die gesuchten Werte α, β, ϱ, nämlich

$$\rho^*) = -\frac{(1+f'^2)}{f''}$$

$$(x_0-\alpha) = \frac{f'(1+f'^2)}{f''} \quad \text{oder} \quad \alpha = x_0 - \frac{f'}{f''}(1+f'^2)$$

$$(y_0-\beta) = -\frac{1+f'^2}{f''} \quad \text{oder} \quad \beta = y_0 + \frac{1+f'^2}{f''}.$$

§ 47. Die Krümmungen zweier sich in P von innen berührenden Kreise verhalten sich umgekehrt, wie die Radien.

Beweis. Man denke sich Punkt P auf beiden Kreisen bis Z und z bewegt, so daß $\angle POZ = Poz$. In Z und z ist P gleichviel von seiner ursprünglichen Richtnng abgewichen. Daher ist die Krümmung des Kreises o soviel mal größer als die des Kreises O, als Bogen Pz in PZ, oder als Po im Radius PO enthalten ist.

Anmerk. Wird die Krümmung eines Kreises vom Radius 1 als Einheit gesetzt, so sind die Krümmungen der Kreise vom Radius 2, 3, 4 .... r auszudrücken durch $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ .... $\frac{1}{r}$.

Zur Beurteilung der Krümmung, welche eine Kurve in einem bestimmten Punkte hat, dient der Krümmungskreis für diesen Punkt; je größer der

*) Da ϱ (als absolute Linie) stets positiv ist, so muß von dem $\pm$ Zeichen der Wurzel dasjenige genommen werden, welches ϱ positiv giebt, also das + Zeichen, wenn die Kurve konkav, also f'' negativ ist, das — Zeichen, wenn die Kurve konvex, also f'' positiv ist.

Digitized by Google

Krümmungsradius ist, je schwächer ist die Krümmung der Kurve in diesem Punkte, und je kleiner der Krümmungsradius ist, desto größer ist die Krümmung der Kurve.

Da $\rho = -\frac{(1+f_{,}^{2})^{\frac{3}{2}}}{f_{''}}$, so ist für $f_{''} = 0$ der Wert von ρ unendlich groß, daher die Krümmung $\left(\frac{1}{\rho}\right) = 0$. Dieser Fall tritt bei allen Wendepunkten ein.

§ 48. Aufgaben.

1. Die Krümmung der Parabel $y = \sqrt{px}$ für einen beliebigen Punkt, dessen Koordinaten x und y sind, zu bestimmen.

Lösung. $y = \sqrt{px}$

$y' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{x}}$

$y'' = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{p}{x^3}}$

$\rho = \mp\frac{(1+y_{,}^{2})^{\frac{3}{2}}}{y_{''}}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(4x+p)^3}{p}}$

Der Krümmungsradius für den Scheitel der Parabel ($x = o$) ist daher $= \frac{p}{2}$. Mit wachsendem x wächst ρ, die Krümmung wird also immer schwächer, und ist daher im Scheitel der Parabel am stärksten.

2. Die Krümmung der Ellipse $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ zu bestimmen.

Lösung. $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$

$y' = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}$

$y'' = -\frac{ab}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}}$

$\rho = \mp\frac{(1+y_{,}^{2})^{\frac{3}{2}}}{y''}$ oder, nachdem die Werte von y' und y'' substituiert und die nötigen Umformungen vorgenommen,

$\rho = \frac{[a^2(a^2 - x^2) + b^2x^2]^{\frac{3}{2}}}{a^4 b}$.

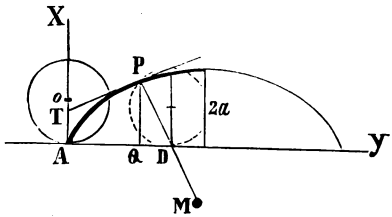
Für $x = o$ ist $\rho = \frac{a^2}{b}$;

für $x = a$ / für $x = -a$ ist $\rho = \frac{b^2}{a}$, also kleiner, als für $x = o$. Demnach ist die Krümmung der Ellipse in ihren Durchschnitten mit der Abscissenachse größer, als in ihren Durchschnitten mit der Ordinatenachse.

Digitized by Google

3. Die Krümmung der Cykloide

$x = a \cdot \arccos\left(\frac{a-y}{a}\right) \mp \sqrt{2ay - y^2}$ zu bestimmen.



Lösung. Da x als f(y) gegeben, so vertausche die Koordinatenachsen, dann ist

$y = a \cdot \arccos\left(\cos = \frac{a-x}{a}\right) \mp \sqrt{2ax - x^2}$, oder, wenn nur die erste Hälfte AB der Cykloide betrachtet wird,

$$y = a \cdot \arccos\left(\cos = \frac{a-x}{a}\right) - \sqrt{2ax - x^2}; \text{ daher}$$

$$y' = \left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{x}{\sqrt{2ax - x^2}} \qquad \rho = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

$$y'' = \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{ax}{\sqrt{(2ax - x^2)^3}} \qquad = 2\sqrt{2ax}.$$

Da die Sehne $PD = \sqrt{2ax}$, so ist **der Krümmungsradius für jeden Punkt der Cykloide doppelt so groß, als die entsprechende Sehne PD des Erzeugungskreises**, daher

$\rho = PM$ für jeden Punkt der Cykloide leicht konstruierbar ist. Für $x = o$ ist $\rho = o$, also der Krümmungsradius der Cykloide in A unendlich. Für $x = 2a$ ist $\rho = 4r$, also die Krümmung der Cykloide in B ein Minimum $= \frac{1}{4r}$.

§ 49. Ist y nicht direkt als f_x gegeben, sondern

$y = \varphi_\theta$
$x = \psi_\theta$ so kann doch y als Funktion von x angesehen werden, da jedem x ein bestimmtes y entspricht. Es handelt sich darum, dy zu bestimmen, wenn x sich um ein solches dx ändert, dessen Größe von $d\theta$ abhängig ist.

Es ist $dy = \varphi'_\theta \cdot d_\theta$
$dx = \psi'_\theta \cdot d_\theta$ } daher f'x oder $\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\varphi'_\theta}{\psi'_\theta}$, also f'x eine Funktion von θ.

Wird weiter nach θ differentiiert, so ist

Digitized by Google

$$df'_x = \frac{\psi' \varphi'' d\theta - \varphi' \psi'' d\theta}{\psi'^2}.$$

Wird nun links mit dx, rechts mit $\psi' d\theta$ dividiert, so ergiebt sich

$$\frac{d f'_x}{dx} \text{ oder } f''_x = \frac{\psi' \varphi'' - \varphi' \psi''}{\psi'^3}.$$

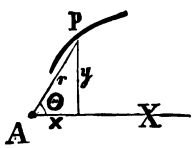
Setze nun $\varphi' = \frac{dy}{d\theta}$, $\psi' = \frac{dx}{d\theta}$,

$$\varphi'' = \frac{d^2y}{d\theta^2}, \quad \psi'' = \frac{d^2x}{d\theta^2}, \text{ so ist}$$

$$f''_x = \frac{\frac{dx}{d\theta} \cdot \frac{d^2y}{d\theta^2} - \frac{dy}{d\theta} \cdot \frac{d^2x}{d\theta^2}}{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^3}$$

$$= \frac{dx \cdot d^2y - dy \cdot d^2x}{dx^3}, \text{ also ebenfalls eine Funktion von } \theta.$$

§ 50. Krümmungsradien für Kurven, welche durch eine Polargleichung gegeben sind.



Sei $r = f_\theta$ die Polargleichung einer Kurve.

Es ist

$y = r \sin\theta$, also eine φ_θ

$x = r \cos\theta$, also eine ψ_θ.

In die Formel für den Krümmungsradius

$$\rho = -\frac{(1 + f'^2)^{\frac{3}{2}}}{f''}$$ substituiere $f' = \frac{dy}{dx}$

$$f'' = \frac{dx\, d^2y - dy\, d^2x}{dx^3},$$

worin $dy = dr \sin\theta + r \cos\theta \cdot d\theta$

$dx = dr \cos\theta - r \sin\theta \cdot d\theta$

$d^2y = \sin\theta \cdot dr + 2\, dr \cos\theta \cdot d\theta - r \sin\theta \cdot d\theta^2$

$d^2x = \cos\theta \cdot d^2r - 2\, dr \sin\theta \cdot d\theta - r \cos\theta \cdot d\theta^2$.

Nach einer etwas umständlichen Multiplikation resultiert

$$\rho = -\frac{(r^2 d\theta^2 + dr^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 d\theta^3 + 2\, dr^2 d\theta - r d^2r d\theta}$$

Daher ergiebt sich als Krümmungsradius für eine Kurve, deren Gleichung in Polarkoordinaten gegeben ist:

Digitized by Google

$$\rho = \mp \frac{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\left(\frac{d^2r}{d\theta^2}\right)}$$

Beispiel.

Zur Bestimmung der Krümmungsradien der Exponentialspirale $r = e^{\theta}$ hat man

$$\frac{dr}{d\theta} = e^{\theta} \qquad \left(\frac{d^2r}{d\theta^2}\right) = e^{\theta}$$

$$\rho = \frac{(r^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2r^2 - r^2} = r\sqrt{2},$$

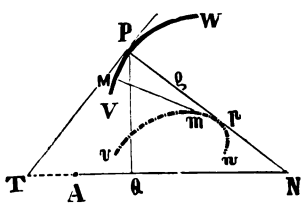
also für jeden Punkt gleich der Normale. Daher ist für die Exponentialspirale die vom Pole nach dem Centrum des Krümmungskreises gezogene Gerade stets gleich dem Radiusvektor.

Neunter Abschnitt.

Evolventen und Evoluten.

§ 51. Erklärung. Die Kurve, welche der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Krümmungskreise einer Kurve $y = f_x$ ist, heißt die Evolute*) dieser Kurve, f_x selber die Evolvente.

§ 52. Aufgabe. Die Gl. der Evolute von VW zu finden.



Lösung. Seien x und y die Koordinaten eines Punktes P der VW, $Pp = \rho$ der zu P gehörige Krümmungsradius, und die Koordinaten von p α u. β, so ist (§ 46)

(1) . . . . . $\alpha = x - \frac{f'}{f''}(1 + f'^2)$

(2) . . . . . $\beta = y + \frac{1 + f'^2}{f''}$.

*) Diese Kurven entdeckte Huyghens und wandte sie auf die von ihm erfundenen Pendeluhren an.

Digitized by Google

Hierin sind y, f', f'' Funktionen von x. Für jeden Wert von x ergeben sich bestimmte Werte von α u. β; umgekehrt ergiebt sich für jedes bestimmte α ein bestimmtes x und somit auch durch Substitution in (2) ein bestimmtes β als Funktion von α.

Beispiel. Die Gl. für die Evolute der **Parabel** $y = \sqrt{ax}$ zu finden.

Lösung. $f' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{x}}$ | (1) .... $\alpha = 3x + \frac{a}{2}$ | $x = \frac{\alpha - a/2}{3}$, daher durch

$f'' = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{a}{x^3}}$ | (2) .... $\beta = -4\sqrt{\frac{x^3}{a}}$ | Substitution in (2)

$$\beta = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{(\alpha - a/2)^3}{3a}}.$$

§ 53. Bezeichnet man $\frac{1}{f''}(1 + f_{,}^{2})$, welches eine Funktion von x ist, mit u_x, so ist

(1) . . . . . $\alpha = x - f' u$

(2) . . . . . $\beta = y + u$.

Durch Differentiieren ergiebt sich

$d\alpha = dx - u \cdot df' - f' \cdot du$

$= dx - u \cdot f'' dx - f' du$

$= dx - (1 + f_{,}^{2}) dx - f' du$

$= -f_{,}^{2} dx - f' du.$

$d\beta = dy + du$, daher

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{dy + du}{-f_{,}^{2} dx - f' du} = \frac{dy + du}{-f_{,}(dy + du)} = -\frac{1}{f'}.$$

$\frac{d\beta}{d\alpha}$ ist die tang des Winkels, den die durch p an die Evolute gelegte Tangente mit AX bildet = tang pNX, daher tang $pNX = \frac{1}{f'}$

Da nun tang PTA = f', so ist $\angle$ pNA + PTA = 90°, also bilden die Linien Pp u. PN eine einzige Gerade. Es folgt daraus der Satz:

Die auf einer Kurve senkrechten Krümmungsradien tangieren die Evolute dieser Kurve.

§ 54. Sind m u. p zwei benachbarte Punkte der Evolute, so ist der Bogen mp der Evolute gleich der Differenz der zugehörigen Krümmungsradien der Evolvente.

Digitized by Google

Beweis.

Es seien α u. β die Koordinaten von m, $Mm=\rho$, $mp=b$, so ist $db=\sqrt{d\alpha^2+d\beta^2}$. Subst. aus dem vorigen § $d\alpha$ u $d\beta$, so wird $db=(dy+du)\sqrt{1+f'^2}$ woraus durch Differentiieren nach einigen Umformungen resultiert:

$$d\rho=-(dy+du)\sqrt{1+f'^2}.$$

Es ist also $db=d\rho$, mithin Bogen mp zwischen den Nachbarpunkten m u. p gleich der Differenz der zugehörigen Krümmungsradien.

Anm. Legt man um vmp einen Faden, befestigt ihn in p und wickelt ihn dann ab, so beschreibt Punkt v die Kurve VMP.

§ 55. Aufgaben.

1. Die Evolute der Ellipse $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ zu finden.

Lösung. Die Ellipsengl. läßt sich auf die Form $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ bringen, daher $\frac{2x}{a^2}dx+\frac{2y}{b^2}dy=0$, woraus $\frac{dy}{dx}$ oder $f'=-\frac{b^2x}{a^2y}$ und

$$\frac{d^2y}{dx^2} \text{ oder } f''=-\frac{b^4}{a^2y^3}, \text{ daher}$$

$$\alpha=x-\frac{xy^2}{b^2}\left(1+\frac{b^4x^2}{a^4y^2}\right)$$

$$\beta=y-\left(\frac{a^4y^2+b^4x^2}{a^2b^4}\right)y$$

woraus nach den gehörigen Substitutionen

$$\alpha=\frac{(a^2-b^2)\,x^3}{a^4}, \text{ daher } x=\sqrt[3]{\frac{a^4\alpha}{a^2-b^2}}=\sqrt[3]{\frac{a^4\alpha}{c^2}}$$

$$\beta=-\frac{(a^2-b^2)\,y^3}{b^4}, \text{ daher } y=-\sqrt[3]{\frac{b^4}{a^2-b^2}}=-\sqrt[3]{\frac{b^4}{c^2}}\beta$$

Es ist aber $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, daher $\sqrt[3]{a^2\alpha^2}+\sqrt[3]{b^2\beta^2}=\sqrt[3]{c^4}$.

Hieraus folgt, nachdem auf beiden Seiten kubiert worden, $27\,a^2b^2c^4\alpha^4\beta^2=(c^4-a^2\alpha^2-b^2\beta^2)^3$, eine Kurve 6. Ordnung.

Digitized by Google

Zusatz. Für $a=0$, also für den Punkt, wo die Evolute der Ellipse die Ordinatenachse schneidet, ist $\beta=-\frac{a^2-b^2}{b}$.

Für $\beta=0$, also für den Punkt, wo die Evolute die Abscissenachse schneidet, ist $\alpha=\frac{b^2}{a}$.

2. Die Evolute der Cykloide

$$x=a\cdot\arccos\left(\frac{a-y}{a}\right)-\sqrt{2ay-y^2}$$ zu finden.

Lösung. Durch Differentiieren nach y ergiebt sich

$$dx=\frac{a}{\sqrt{2ay-y^2}}\cdot dy-(2ay-y^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(a-y)\,dy \text{ oder}$$

$\frac{dy}{dx}$ oder $f'=\sqrt{\frac{2a}{y}-1}$. Ferner ist

$\frac{d^2y}{dx^2}$ oder $f''=-\frac{a}{y^2}$.

Durch Substituierung dieser Werte von f' und f'' in die Evolutengleichungen § 52 folgt:

$$\alpha=x-\frac{f'}{f''}(1+f'^2)$$

$$\beta=y+\frac{1+f'^2}{f''}$$

$$\alpha=x+2\sqrt{2ay-y^2}=a\cdot\arccos\left(\frac{a-y}{a}\right)+\sqrt{2ay-y^2}$$

$\beta=-y$, somit die Gleichung der Evolute der Cykloide:

$$\alpha=a\cdot\arccos\left(\frac{a+\beta}{a}\right)+\sqrt{-2a\beta-\beta^2}.$$

Die Evolute der Cykloide ist also eine dieser kongruente Cykloide. Damit α reell wird, muß β negativ genommen werden.

Für $\beta=-2a$ folgt $\alpha=a\cdot\arccos(\cos=-1)$

$=a\pi$, also gleich dem Umfange des Erzeugungskreises der gegebenen Cykloide.

Digitized by Google

Zehnter Abschnitt.

Die wichtigsten Sätze der Integralrechnung.

§ 56. Erklärung. Die Integralrechnung lehrt zu einem gegebenen Differentiale die ursprüngliche Funktion (das Integral) finden. $\int d\varphi = \varphi$.

§ 57. Aus § 8 ergeben sich unmittelbar folgende Integrationsformeln:

1. $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$
2. $\int e^x \, dx = e^x$
3. $\int \frac{1}{x} \, dx = \lg x$
4. $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\lg a}$
5. $\int \sin x \, dx = -\cos x$
6. $\int \cos x \, dx = \sin x$
7. $\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\operatorname{cotg} x$
8. $\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \operatorname{tang} x$
9. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \operatorname{arc}(\sin = x) = -\operatorname{arc}(\cos = x)$
10. $\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \operatorname{arc}(\operatorname{tang} = x) = -\operatorname{arc}(\operatorname{cotg} = x)$.

Anm. Die Formel 1) gilt dann nicht, wenn $n = -1$; in diesem Fall ist Formel 3) anzuwenden.

§ 58. Da zwei Funktionen, die sich nur durch das konstante Glied unterscheiden, dasselbe Differential haben, so kann

Digitized by Google

man jedem Integrale eine beliebige ± Konstante hinzufügen, z. B. $\int x^3\,dx = \frac{1}{4}x^4 + c$.

Jeder konstante Faktor unter dem Integralzeichen kann stets vor dasselbe gesetzt werden, z. B.

$$\int ax^3\,dx = a\int x^3\,dx = \frac{a}{4}x^4 + c.$$

§ 59. Übungsaufgaben.

1. $\int \frac{1}{x+1}\,dx = \int \frac{1}{y}\,dy = \lg y = \lg(x+1)$.

2. $\int \frac{1}{x+a}\,dx = \int \frac{1}{y}\,dy = \lg y = \lg(x+a)$.

3. $\int \frac{1}{x-a}\,dx = \int \frac{1}{y}\,dy = \lg y = \lg(x-a)$.

4. $\int \frac{1}{(x-a)^3}\,dx = \int y^{-3}\,dy = -\frac{1}{2}\,y^{-2} = -\frac{1}{2(x-a)^2}$.

5. $\int \frac{1}{(x-a)^n}\,dx = \frac{1}{-n+1}(x-a)^{-n+1}$

6. $\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}\,dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{a}{1+y^2}\,dy$

$$= \frac{1}{a}\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{x}{a}\right).$$

7. $\int \frac{1}{a^2x^2+1}\,dx = \int \frac{1}{y^2+1}\cdot\frac{1}{a}\,dy = \frac{1}{a}\operatorname{arc}(\operatorname{tang} = ax)$.

8. $\int e^{ax}\,dx = \int e^y\,\frac{1}{a}\,dy = \frac{1}{a}e^{ax}$.

9. $\int e^{-ax}dx = -\frac{1}{a}e^{-ax}$.

10. $\int \cos ax\,dx = \int \cos y\,\frac{1}{a}\,dy = \frac{1}{a}\sin ax$.

Digitized by Google

11. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{a}{x}\right)^2}}\,dx = \arc\left(\sin = \frac{x}{a}\right).$

12. $\int \frac{x\,dx}{ax^2+b} = \int \frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{2a} = \frac{1}{2a}\lg(ax^2+b).$

Anm. 1. **Ist, wie in diesem Beispiele, der Zähler eines zu integrierenden Bruches das Differential des Nenners,** (abgesehen von einem konstanten Faktor), so ist das Integral stets gleich dem lg des Nenners.

13. $\int (1-x^4)^7\ x^3\,dx = \int y^7 \cdot -\tfrac{1}{4}\,dy = -\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{8}(1-x^4)^8.$

14. $\int (1-x^3)^{-6}\,x^2\,dx = \int y^{-6}\cdot -\tfrac{1}{3}\,dy = \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{5}(1-x^3)^{-5}.$

15. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot x\,dx = \int y^{-\frac{1}{2}}\cdot -\tfrac{1}{2}\,dy$
$= -(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$

Anm. 2. **Ist, wie in den Beisp. 13--15, der eine Faktor eines zu integrierenden Produktes eine Potenz, der andere** (abgesehen von einem konstanten Faktor) **das Differential der Basis dieser Potenz,** so ist das Integral gleich der um 1 höheren Potenz.

16. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int (a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,x\,dx = -(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}.$

17. $\int \lg x\cdot\frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{2}(\lg x)^2.$

18. $\int (ax+b)^2\,dx = \frac{1}{3a}(ax+b)^3.$

19. $\int (x^2+a^2)^{-\frac{1}{2}}\,x\,dx = (x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}.$

20. $\int (ax^2+bx+c)^4\,(2ax+b)\,dx = \tfrac{1}{5}(ax^2+bx+c)^5.$

21. $\int (ax^2+bx+c)^3\,(2ax+b)\,dx = \tfrac{1}{4}(ax^2+bx+c)^4.$

Digitized by Google

§ 60. Teilweise Integration. Sind f und φ zwei Funktionen von x, so ist $\int f\,d\varphi = f\varphi - \int \varphi\,df$, d. h.

das Integral eines Produktes zweier Faktoren, von denen der zweite $d\varphi$ integrierbar ist, ist gleich dem ersten Faktor mal dem Integral φ des zweiten Faktors, vermindert um das Integral des Produktes aus diesem φ und dem Differential des ersten Faktors.

Beweis. Da $d(f\varphi) = \varphi df + f d\varphi$, so ist

$$f\varphi = \int \varphi\,df + \int f d\varphi, \text{ daher}$$

$$\int f d\varphi = f\varphi - \int \varphi\,df.$$

Beispiele.

1. $\int x \cdot e^x\,dx = x \cdot e^x - \int e^x\,dx$
$= x \cdot e^x - e^x = (x-1)e^x.$

2. $\int \cos x \cdot x\,dx = \int x \cdot \cos x\,dx$
$= x \sin x - \int \sin x\,dx = x \sin x + \cos x.$

3. $\int x^2 \cos x\,dx = x^2 \sin x - \int \sin x \cdot 2x\,dx$
$= x^2 \sin x + 2x \cos x - \int \cos x\,d\,2x$
$= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x.$

4. $\int \lg x \cdot dx = x \lg x - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx$
$= x \lg x - x.$

5. $\int x \lg x\,dx = \int \lg x \cdot x\,dx = \frac{1}{2} x^2 \lg x - \int \frac{1}{2} x^2 \frac{1}{x}\,dx$
$= \frac{1}{2} x^2 \lg x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} x^2$
$= \frac{1}{2} x^2 \lg x - \frac{1}{4} x^2.$

6. $\int \frac{1}{x} \lg x\,dx = \int \lg x \cdot \frac{1}{x}\,dx = \lg x \cdot \lg x - \int \lg x \frac{1}{x}\,dx$

oder $2 \int \frac{1}{x} \lg x\,dx = (\lg x)^2$, daher

$$\int \frac{1}{x} \lg x\,dx = \frac{1}{2} (\lg x)^2$$

Digitized by Google

7. $\int x^n \lg x \, dx = \int \lg x \, x^n \, dx$

$$= \frac{1}{n+1} x^{n+1} \lg x - \int \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{x} \, dx$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1} \lg x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}.$$

8. $\int \operatorname{arc}(\operatorname{tang}=x) \, dx = x \cdot \operatorname{arc}(\operatorname{tang}=x) - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2} \, dx$

also nach § 59, 12

$$= x \cdot \operatorname{arc}(\operatorname{tang}=x) - 1/2 \lg (1+x^2)$$

9. $\int \operatorname{arc}(\sin=x) \, dx = x \cdot \operatorname{arc}(\sin=x) - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$$= x \cdot \operatorname{arc}(\sin=x) - \int x (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx$$

also nach § 59, 14 Anm.

$$= x \cdot \operatorname{arc}(\sin=x) + (1-x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

10. $\int \operatorname{arc}(\cos=x) \, dx = x \cdot \operatorname{arc}(\cos=x) - \sqrt{1-x^2}$

11. $\int \frac{1}{(x^2+a^2)^n} dx = \int (x^2+a^2)^{-n} dx$

$$= x (x^2+a^2)^{-n} - \int x \cdot -n (x^2+a^2)^{-n-1} \cdot 2x \, dx$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}} dx$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n \int \frac{x^2+a^2-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}} dx$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n \int \frac{1}{(x^2+a^2)^n} dx - 2na^2 \int \frac{1}{(x^2+a^2)^{n+1}} dx$$

Digitized by Google

Da hieraus $\int \frac{1}{(x^2+a^2)^{n+1}} = \frac{x}{(x^2+a^3)^n} + (2n-1)\int \frac{1}{(x^2+a^2)^n} dx$ so ist das gesuchte Integral

$$= \frac{x}{(2n-2)\,a^2(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{(2n-2)a^2}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}};$$

das gesuchte Integral ist somit auf ein anderes von derselben Form zurückgeführt, in welchem der Exponent n um 1 niedriger ist. Da nun n eine ganze Zahl ist, so kommt man durch wiederholte Anwendung der gefundenen Reduktionsformel endlich auf $\int \frac{1}{x^2+a^2} dx$, welches nach § 59, 6 gleich $\frac{1}{a}$ arc $\left(\text{tang} \frac{x}{a}\right)$.

12. $\int \frac{1}{(x^2-a^2)^n} dx$

$$= \frac{x}{(2n-2)\,a^2(x^2-a^2)^{n-1}} + \frac{2n-4}{(2n-2)\,a^2}\int \frac{1}{(x^2-a^2)^{n-1}} dx.$$

Mittelst wiederholter Anwendung dieser Reduktionsformel kommt man endlich auf $\int \frac{1}{x^2-a^2} dx$, welches, wie im § 61, 4 bewiesen werden wird, $= \frac{1}{2a} \log \frac{x-a}{x+a}$ ist.

§ 61. Integration rational gebrochener Funktionen, die sich in Partialbrüche zerlegen lassen, deren Zähler Funktionen I Grades oder konstant, deren Nenner Funktionen I. oder II. Grades, oder Potenzen davon sind.

1. $\int \frac{5x-2}{x^2+x-20} dx = \int \frac{2}{x-4} dx + \frac{3}{x+5} dx$

$$= 2 \lg (x-4) + 3 \lg (x+5)$$

2. $\int \frac{27}{x^2+x-20} dx = \int \frac{3}{x-4} dx - \frac{3}{x+5} dx$

$$= 3 \lg \frac{x-4}{x+5} = \log \left(\frac{x-4}{x+5}\right)^3.$$

Digitized by Google

3. $$\int \frac{1}{a^2-x^2}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2a}}{a+x}\,dx + \frac{\frac{1}{2a}}{a-x}\,dx$$
$$= \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{a+x} + \frac{dx}{a-x}$$
$$= \frac{1}{2a}\lg\frac{a+x}{a-x}.$$

4. $$\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \int \frac{-\frac{1}{2a}}{x+a}\,dx + \frac{\frac{1}{2a}}{x-a}\,dx$$
$$= \frac{1}{2a}\int -\frac{dx}{x+a} + \frac{dx}{x-a}$$
$$= \frac{1}{2a}\lg\frac{x-a}{x+a}.$$

5. $$\int \frac{x^2-2x+21}{(x-3)^2(x+3)}\,dx = \int \frac{4\,dx}{(x-3)^2} + \frac{dx}{x+3}$$
$$= -4(x-3)^{-1} + \lg(x+3).$$

6. $$\int \frac{3x^3-27x^2+85x-69}{(x-3)^3\cdot(x+3)}\,dx = \int \frac{4}{(x-3)^3}\,dx + \frac{3}{x+3}\,dx$$
$$= 4\int (x-3)^{-3}\,dx + 3\int \frac{1}{x+3}\,dx$$
$$= -2(x-3)^{-2} + 3\lg(x+3).$$

7. $$\int \frac{x^3+5x^2-13x-75}{x^2+x-20}\,dx = \int \left(x+4+\frac{3x+5}{x^2+x-20}\right)dx$$
$$= \tfrac{1}{2}x^2+4x+\int \frac{17}{9(x-4)}\,dx + \int \frac{10}{9(x+5)}\,dx$$
$$= \tfrac{1}{2}x^2+4x+\tfrac{17}{9}\lg(x-4)+\tfrac{10}{9}\lg(x+5).$$

Digitized by Google

§ 62. Integration der wichtigsten irrationalen Funktionen.

1. $\int \frac{1}{\sqrt{x+a}}\,dx = \int (x+a)^{-\frac{1}{2}}\,dx = 2\sqrt{x+a}.$

2. $\int \frac{1}{\sqrt{ax+b}}\,dx = \int (ax+b)^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{2}{a}\sqrt{ax+b}.$

3. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx.$ Setze $\sqrt{x^2+a^2} = y - x$, so ist

$$x^2 + a^2 = y^2 - 2xy + x^2$$
$$y\,dy = (y - x)\,dy$$
$$\frac{dx}{y-x} = \frac{dy}{y}, \text{ daher das gesuchte Integral}$$
$$= \int \frac{dy}{y} = \lg (x + \sqrt{x^2+a^2})$$

4. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-ax}}\,dx.$ Setze $\sqrt{x^2-ax} = y - x$, so ist

$$-ax = y^2 - xy, \text{ woraus}$$
$$\frac{dx}{y-x} = \frac{2\,dy}{2y-a}, \text{ daher das gesuchte Integral}$$
$$= \int \frac{dy}{y - a/2} = \lg (x - a/2 + \sqrt{x^2-ax})$$

5. $\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx.$ Setze $\sqrt{ax^2+bx+c} = y - x\sqrt{a}$,

so ist $bx + c = y^2 - 2xy\sqrt{a}$,
$$b\,dx = 2y\,dy - 2y\sqrt{a}\cdot dx - 2x\sqrt{a}\cdot dy$$
$$\frac{dx}{y - x\sqrt{a}} = \frac{dy}{y\sqrt{a} + \frac{b}{2}} \text{ daher das gesuchte Integral}$$
$$= \int \frac{dy}{y\sqrt{a} + \frac{b}{2}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \lg (ax + b/2 + \sqrt{a}\cdot\sqrt{ax^2+bx+c})$$

Digitized by Google

6. $\int \frac{1}{\sqrt{-ax^2+bx+c}}\,dx$. Setze $-ax^2+bx+c$ oder

$-(ax^2-bx)+c$ oder $-\left(x\sqrt{a}-\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2+\frac{b^2}{4a}+c$

$=-y^2+m^2$, so daß $x\sqrt{a}-\frac{b}{2\sqrt{a}}=y$,

so ist $dx\sqrt{a}=dy$, also $dx=\frac{1}{\sqrt{a}}dy$, daher das gesuchte Integral

$$=\frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{dy}{\sqrt{m^2-y^2}}=\frac{1}{m\sqrt{a}}\int\frac{dy}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{m}\right)^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\operatorname{arc}\left(\sin=\frac{y}{m}\right)=\frac{1}{\sqrt{a}}\operatorname{arc}\left[\sin=\frac{x\sqrt{a}-\frac{b}{2\sqrt{a}}}{\sqrt{\frac{b^2}{4a}+c}}\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a}}\operatorname{arc}\left(\sin=\frac{2ax-b}{\sqrt{b^2+4ac}}\right)$$

Anmerkg. Ist in den Beispielen 5 u. 6 $a=0$, so ist nach Beisp. 2.

$$\int\frac{1}{\sqrt{bx+c}}=\frac{2}{b}\sqrt{bx+c}.$$

7. $\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=-\sqrt{1-x^2}$. (Siehe § 59, 16.)

8. $\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int x\cdot\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=-x\sqrt{1-x^2}-\int-\sqrt{1-x^2}\cdot dx$

$$=-x\sqrt{1-x^2}+\int\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$=-x\sqrt{1-x^2}+\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}-\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx, \text{ daher}$$

$$2\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=-x\sqrt{1-x^2}+\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

daher das gesuchte Integral $=-\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\operatorname{arc}(\sin=x)$.

Digitized by Google

9. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{\sqrt{1-(x/a)^2}}\,dx$. Setze $\frac{x}{a} = y$,

also $dx = a\,dy$, so ist das gesuchte Integral

$$= \frac{a}{a}\int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dy$$

$$= \arc(\sin = x/a).$$

10. $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \frac{1}{a}\int \frac{x^2}{\sqrt{1-(x/a)^2}}$. Setze $\frac{x}{a} = y$, also $dx = a\,dy$, so ist d. gesuchte Integral

$$= a^2\int \frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}}\,dy \text{ oder (nach Bsp. 8).}$$

$$= a^2\left[-\frac{y}{2}\sqrt{1-y^2} + \frac{1}{2}\arc(\sin = y)\right]$$

$$= -\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arc(\sin = x/a).$$

§ 62. Integration der wichtigsten logarithmischen, Exponential- und trigonometrischen Funktionen.

1. $\int \lg x \cdot dx$ (s. § 60,4) $= x \lg x - x$.

2. $\int x \lg x \cdot dx$ (s. § 60,5) $= \frac{x^2}{2}\lg x - \frac{x^2}{4}$.

3. $\int x^n \lg x \cdot dx$ (s. § 60,7) $= \frac{x^{n+1}}{n+1}\lg x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$

4. $\int \frac{1}{x} \lg x \cdot dx$ (s. 60,6) $= \frac{1}{2}(\lg x)^2$

5. $\int x \cdot e^x\,dx$ (s. 60,1) $= (x-1)e^x$.

Digitized by Google

6. $\int x^2\ e^x\,dx = x^2\,e^x - \int e^x \cdot 2x\,dx$
$= x^2\,e^x - 2\int x\ e^x\,dx$
$= x^2 e^x - 2\,(x-1)\ e^x = (x^2 - 2x + 2)\ e^x.$

7. $\int \frac{1}{e^x}\,dx.$ Setze $e^x = y$, also $dx = dy$, so resultiert $-\frac{1}{e^x}$.

8. $\int \sin x \cos x\,dx = \sin x \sin x - \int \sin x \cos x\,dx$, daher
$= \frac{1}{2}\sin^2 x.$

9. $\int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \int \frac{1}{\cos x}\sin x\,dx = \int \frac{1}{y}\cdot -dy$
$= -\lg y = -\lg \cos x.$

10. $\int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \int \frac{1}{\sin x}\cos x\,dx = \int \frac{1}{y}\,dx$
$= \lg y = \lg \sin x.$

11. $\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \int \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\,dx.$ Setze $\frac{x}{2} = y$,
$dx = 2dy,$
so ist $\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \int \frac{1}{\sin y\ \cos y}\,dy$
$= \lg \operatorname{tang} \frac{x}{2}.$

2. $\int \frac{1}{\cos x}\,dx = \int \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2} - x)}\,dx$, daher (nach 11)
$= -\lg \operatorname{tang}(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})$
$= \lg \operatorname{tang}(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}).$

13. $\int \frac{1}{\sin x \cos x}\,dx = \lg \operatorname{tang} x$, denn $d(\lg \operatorname{tg} x) = \frac{1}{\sin x \cos x}$

Digitized by Google

Zweiter Beweis:

$$\int \frac{1}{\sin x \cos x}\,dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x}\,dx$$

$$= \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx + \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx, \quad \text{oder nach 9. u. 10.}$$

$$= -\lg \cos x + \lg \sin x$$

$$= \lg \operatorname{tang} x.$$

14. $\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x.$

15. $\int \cos^3 x\,dx = \frac{1}{4}\int (3\cos x + \cos 3x)\,dx = \frac{3}{4}\sin x + \frac{1}{12}\sin 3x$

§ 64. Tabelle der wichtigsten Integralformeln.

1. $\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}\,x^{n+1}.$

2. $\int (ax+b)^2 = \frac{1}{3a}\,(ax+b)^3.$

3. $\int (ax^2+bx+c)^n\,(2ax+b)\,dx = \frac{1}{n+1}\,(ax^2+bx+c)^{n+1}.$

4. $\int \frac{1}{x \pm a}\,dx = \lg (x \pm a).$

5. $\int \frac{1}{(x-a)^n}\,dx = \frac{1}{-n+1}\,(x-a)^{-n+1}$

6. $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arc}\,(\operatorname{tang} = x).$

7. $\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = {}^1/_a \operatorname{arc}\,(\operatorname{tang} = {}^x/_a$

8. $\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\lg \frac{x-a}{x+a}$

9. $\int \frac{1}{a^2x^2+1}\,dx = {}^1/_a \operatorname{arc}\,(\operatorname{tang} = ax)$

10. $\int \frac{x}{ax^2+b}\,dx = \frac{1}{2a}\lg (ax^2+b)$

Digitized by Google

11. $\int \frac{1}{\sqrt{ax+b}}\,dx = \frac{2}{a}\sqrt{ax+b}$

12. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \begin{matrix} \text{arc (sin} = x) \\ = -\text{arc (cos} = x). \end{matrix}$

13. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \text{arc (sin} = x/a)$

14. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = \lg (x + \sqrt{x^2+a^2})$

15. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-ax}}\,dx = \lg (x - a/_2 + \sqrt{x^2-ax}).$

16. $\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \lg (ax + b/_2 + \sqrt{a}\cdot\sqrt{ax^2+bx+c})$

17. $\int \frac{1}{\sqrt{-ax^2+bx+c}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \text{arc}\left(\sin = \frac{2ax-b}{\sqrt{4ac+b^2}}\right)$

18. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = \sqrt{x^2+a^2}$

19. $\int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = -\sqrt{a^2-x^2}$

20. $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = -x/_2\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\,\text{arc (sin} = x/a)$

21. $\int \lg x\,dx = x \lg x - x$

22. $\int \lg x \cdot x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \lg x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$

23. $\int \lg x \cdot \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{2} (\lg x)^2$

24. $\int e^x\,dx = e^x.$

25. $\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a} e^{ax}$

26. $\int e^{-ax}\,dx = -\frac{1}{a} e^{-ax}$

27. $\int e^x \cdot x\,dx = e^x (x-1)$

28. $\int e^x \cdot x^2\,dx = e^x (x^2 - 2x + 2).$

Digitized by Google

29. $\int \frac{1}{e^x}\,dx = -\frac{1}{e^x}.$

30. $\int \sin x\,dx = -\cos x.$

31. $\int \cos x\,dx = \sin x.$

32. $\int \text{tang}\, x\,dx = -\lg \cos x.$

33. $\int \text{cotg}\, x\,dx = \lg \sin x.$

34. $\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x.$

35. $\int \cos^3 x\,dx = \frac{3}{4}\sin x + \frac{1}{12}\sin 3x.$

36. $\int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\sin ax.$

37. $\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \lg \text{tang}\, x/_2$

38. $\int \lg \frac{1}{\cos x}\,dx = \lg \text{tang}\,(x/_2 + \pi/_4).$

39. $\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\text{cotg}\, x.$

40. $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \text{tang}\, x.$

41. $\int \cos x \cdot x\,dx = x \sin x + \cos x.$

42. $\int \cos x \cdot x^2 dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x.$

43. $\int \sin x \cos x\,dx = \frac{1}{2}\sin^2 x.$

44. $\int \frac{1}{\sin x \cos x}\,dx = \lg \text{tang}\, x.$

Digitized by Google

Elfter Abschnitt.

Rektifikation und Quadratur der Kurven.

§ 65. $y = f_x$ sei die Gleichung einer Kurve, deren **Bogen** $s = P_0P$ gemessen werden soll. Läßt man die Abscisse des Punktes P, nämlich $AQ = x$, um $QS = dx$ wachsen, und dadurch den zu messenden Bogen $P_0P = s$ um $PR = ds$, so ist, da ein unendlich kleines Bogenelement mit seiner Sehne zusammenfällt,

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx, \text{ daher } s = \int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

oder $s = F_x + c$. Da nun für $x = x_0$ der Bogen $s = o$ sein soll, so muß die Konstante so beschaffen sein, daß $o = F_{x_0} + c$, also $c = -F_{x_0}$, daher $s = F_x - F_{x_0}$, oder mit anderer Bezeichnung

$$s = \int_{x_0}^{x} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx.$$

Dieses Integral hat einen bestimmten Wert, sobald die Grenzen x_0 und x bestimmte Werte haben und heißt dann ein bestimmtes Integral, z. B.

$$\int_0^x x^2 dx = \tfrac{1}{3}x^3 \qquad \int_0^1 x^2 dx = \tfrac{1}{3} \qquad \int_0^2 x^2 dx = \tfrac{8}{3}.$$

Anmerk. Für Polarkoordinaten ist $ds^2 = dr^2 + r^2\,d\theta^2$, daher

$$s = \int \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} \cdot d\theta$$

Digitized by Google

§ 66. Aufgaben.

1. Den Kreis $y^2+x^2=a^2$ zu rektifizieren.

Lösung. $s=\int_{x_0}^{x}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$, also, da $2y\,dy+2x\,dx=0$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y},$$

$$=\int_{x_0}^{x}\frac{a\cdot 1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx, \text{ d. h. (nach § 64, 13)}$$

$$=\overset{*)}{\Big[}a\cdot\arc(\sin=x/a)\Big]_{x_0}^{x}$$

Soll der Bogen in dem Punkte, dessen Abscisse o ist, anheben, so ist

$$s=a\cdot\arc(\sin=x/a).$$

2. Die Parabel $y^2=ax$ zu rektifizieren.

Lösung. $2y\,dy=a\,dx$, $\frac{dy}{dx}=\frac{a}{2y}$, $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{a}{4x}$, daher

$$=\int_{x_0}^{x}\sqrt{1+\frac{a}{4x}}\,dx. \quad \text{Setze } \sqrt{1+\frac{a}{4x}}=t, \text{ so ist } x=\frac{a/4}{t^2-1}$$

$$=\int_{x_0}^{x}t\,dx=tx-\int x\,dt$$

$$=tx-\frac{a}{4}\int\frac{1}{t^2-1}\,dt \text{ oder (nach § 64, 8)}$$

$$=tx-\frac{a}{8}\lg\frac{t-1}{t+1},$$

*) Das Zeichen $\Big[\quad\Big]_{x_0}^{x}$ bedeutet, daß in dem dazwischen enthaltenen Ausdrucke für x einmal x und dann x_0 zu setzen, und der erhaltene zweite Ausdruck vom ersten abzuziehen ist.

Digitized by Google

$$= \left[x \sqrt{1+\frac{a}{4x}} - \frac{a}{8} \lg \frac{-1+\sqrt{1+\frac{a}{4x}}}{+1+\sqrt{1+\frac{a}{4x}}} \right]_{x_0}^{x}$$

$$= \left[\sqrt{x^2+\frac{a}{4}x} + \frac{a}{8} \lg \frac{(\sqrt{4x+a}+2\sqrt{x})}{a} \right]_{x_0}^{x}$$

$$= \left[\sqrt{x^2+a'_4\, x} + a'_4 \lg \left(\frac{\sqrt{4x+a}+2\sqrt{x}}{\sqrt{a}} \right) \right]_{x_0}^{x}$$

Soll der Bogen im Scheitel der Parabel anheben, so ist

$$s = \sqrt{x^2+\frac{a}{4}x} + \frac{a}{4} \lg \left(\frac{\sqrt{4x+a}+2\sqrt{x}}{\sqrt{a}} \right).$$

Anmerk. Sind nicht x_0 und x, sondern die Grenzordinaten y_0 und y des zu berechnenden Parabelbogens gegeben, so ist, da $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{2y}$ u. $dx = \frac{2}{a}\, y\, dy$,

$$s = \int_{y_0}^{y} \sqrt{1+\frac{a^2}{4y^2}} \cdot \frac{2}{a}\, y\, dy$$

$$= \frac{1}{a} \int \sqrt{4y^2+a^2} \cdot dy. \quad \text{Setze } \sqrt{4y^2+a^2} = ty, \text{ also}$$

$$y^2 = \frac{a^2}{t^2-4}, \text{ so ist}$$

$$s = \frac{1}{a} \int t\, y\, dy = \frac{1}{a} \left(\frac{t}{2} y^2 - \frac{1}{2} \int y^2\, dt \right)$$

$$= \frac{1}{a} \left(\frac{t}{2} y^2 - \frac{a^2}{2} \int \frac{1}{t^2-4}\, dt \right) \text{ oder, nach § 64, 8}$$

$$= \frac{1}{a} \left(\frac{t}{2} y^2 - \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{4} \lg \frac{t-2}{t+2} \right), \text{ daher, wenn } y$$

wieder eingeführt wird,

$$s = \left[\frac{1}{a} \left(y \sqrt{4y^2+a^2} + \frac{a^2}{4} \lg \frac{\sqrt{4y^2+a^2}+2y}{\sqrt{4y^2+a^2}-2y} \right) \right]_{y_0}^{y}$$

Digitized by Google

$$s=\left[\frac{y}{2a}\sqrt{4y^2+a^2}+\frac{a}{4}\lg\frac{2y+\sqrt{4y^2+a^2}}{a}\right]_{y_0}^{y}$$

Soll der Bogen im Scheitel anheben, wo $y_0=0$, so ist

$$s=\frac{y}{2a}\sqrt{4y^2+a^2}+\frac{a}{4}\lg\frac{2y+\sqrt{4y^2+a^2}}{a}.$$

3. Die Ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ zu rektificieren.

Lösung. Da $\frac{x\,dx}{a^2}+\frac{y\,dy}{b^2}=0$, so ist $\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y}$, daher

$$s=\int_{x_0}^{x}\sqrt{1+\frac{b^4x^2}{a^4y^2}}\,dx,\text{ oder, nachdem } a^4y^2 \text{ in } x \text{ ausgedrückt,}$$

$$s=\int_{x_0}^{x}\sqrt{\frac{a^2-x^2\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)}{a^2-x^2}}\cdot dx$$

Dieses Integral ist eine transscendente Funktion.

Anmerk. Bei der Hyperbel $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ist

$$s=\int_{x_0}^{x}\sqrt{\frac{a^2-x^2\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)}{a^2-x^2}}dx$$

4. Die Cykloide $\left\{\begin{array}{l}x=a\theta-a\sin\theta\\ y=a\quad -a\cos\theta\end{array}\right\}$ zu rektificieren.

Lösung. $ds^2=dx^2+dy^2=2a^2(1-\cos\theta)\,d\theta^2$

$$=4a^2\sin^2\frac{\theta}{2}\,d\theta^2$$

$$ds=2a\sin\frac{\theta}{2}\cdot d\theta$$

$$s=2a\int\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta.\quad\text{Setze } \frac{\theta}{2}=\psi,\text{ also } d\theta=2d\psi,\text{ so ist}$$

$$\int\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta=2\int\sin\psi\,d\psi$$

$$=-2\cos\psi,\text{ daher}$$

$$s=-4a\cos\frac{\theta}{2}+c.$$

Digitized by Google

Soll Bogen s vom Anfangspunkte A anheben, wo $\theta = 0$, so muß $0 = -4a + c$, also $c = 4a$ sein, daher

$$s = 4a\ (1 - \cos \theta/2) = 8a \sin^2 \theta/4.$$

Für $\theta = 2\pi$ ergiebt sich als **Länge der ganzen Cykloide 8a.** Die Cykloide ist also eine der wenigen Kurven, die sich ganz genau rektificieren lassen.

5. Die Evolute $y = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{(x - a/2)^3}{3a}}$ (s. § 51) der Parabel $Y^2 = aX$ zu rektificieren.

Lösung. $y^2 = \frac{16}{27a}\left(x - \frac{a}{2}\right)^3$, daher $\frac{dy}{dx} = \frac{8}{9ay}\left(x - \frac{a}{2}\right)^2$.

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx = \sqrt{1 + \frac{4}{3a}\left(x - \frac{a}{2}\right)}\, dx.$$

$$= \sqrt{\frac{4x + a}{3a}}\, dx = \frac{(4x+a)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{3a}}\, dx.$$

$$s = \frac{1}{\sqrt{3a}} \int_{x_0}^{x} (4x+a)^{\frac{1}{2}}\, dx. \quad \text{Setze } 4x+a = y,\ dx = 1/4\ dy.$$

$$s = \frac{1}{4\sqrt{3a}} \int y^{1/2}\, dy$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{3a}} \cdot \frac{2}{3} (4x+a)^{\frac{3}{2}} + c.$$

$$= \frac{(4x+a)^{\frac{3}{2}}}{6\sqrt{3a}} + c.$$

6. Die archimedische Spirale $r = \frac{a}{2\pi}\theta$ zu rektificieren.

Lösung. Nach § 65 Anm. ist $s = \int \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$.

Da nun $\frac{dr}{d\theta} = \frac{a}{2\pi}$, so ist

Digitized by Google

$$s=\int\sqrt{r^2+\frac{a^2}{4\pi^2}}\cdot d\theta=\int\sqrt{\frac{a^2}{4\pi^2}\theta^2+\frac{a^2}{4\pi^2}}\cdot\theta$$

$$=\frac{a}{2\pi}\int\sqrt{\theta^2+1}\,d\theta.\quad\text{Setze }\sqrt{\theta^2+1}=t\theta,\text{ also}$$

$$\theta^2=\frac{1}{t^2-1},\text{ so ist}$$

$$s=\frac{a}{2\pi}\int t\,\theta\,d\theta$$

$$=\frac{a}{2\pi}\left(\frac{t}{2}\theta^2-\frac{1}{2}\int\frac{1}{t^2-1}\,dt\right)$$

$$=\frac{a}{4\pi}[\theta\sqrt{\theta^2+1}+\lg(\theta+\sqrt{\theta^2+1})]$$

§ 67. $y=f_x$ sei die Gl. einer Kurve; die Abscissen $AQ_0=x_0$, $AQ=x$, die Ordinaten $P_0Q_0=y_0$, $PQ=y$. Dann ist die **Fläche** $z=Q_0P_0PQ$ offenbar durch x_0, y_0, x, y bestimmt, also eine Funktion von x. Wächst AQ um $QS=dx$ und dadurch die Fläche z um dz, so läßt sich dz als ein Rechteck von der Basis dx und der Höhe y ansehen, daher

$$dz=f_x\,dx$$

$$z=\int f_x\,dx=F_x+c.$$

Da nun für $x=x_0$ der Flächeninhalt z gleich Null sein soll, so muß die Konstante so beschaffen sein, daß $0=F_{x_0}+c$, daher $c=-F_{x_0}$, daher $z=\int_{x_0}^{x} f_x\,dx$.

Anmerk. Für Polarkoordinaten ist, wenn θ um $d\theta$, r um dr, die Fläche z um dz wächst, $dz=\frac{r+dr}{2}\cdot r\,d\theta=\frac{r^2}{2}d\theta+\frac{r}{2}dr\,d\theta=\frac{r^2}{2}d\theta$, daher $z=\frac{1}{2}\int r^2 d\theta$.

§ 68. Aufgaben.

1. Die Kurve $y=x^2$ zu quadrieren.

Lösung. $z=\int_{x_0}^{x} x^2\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{x_0}^{x}$

Digitized by Google

Soll die Fläche von A anheben, wo $x_0 = 0$, so ist $z = \frac{1}{3} x^3$
Soll die Fläche anheben von $P_0 Q_0$, deren Abscisse $x_0 = 1\frac{1}{2}$ ist,
so ist $z = \frac{1}{3} x^3 - 9/8$.

2. Die Parabel $y^2 = ax$ zu quadrieren.

Lösung. $z = \int a^{1/2} x^{1/2}$

$= \frac{2}{3} a^{1/2} x^{\frac{3}{2}} + c.$

$= \frac{2}{3} xy + c.$

Soll die Fläche vom Scheitel anheben ($x = 0$) so ist $c = 0$, also $z = \frac{2}{3} xy$.
Soll die Fläche von $P_0 Q_0$, deren Abscisse gleich 3 ist, anheben, so ist
$c = -2\sqrt{3a}$.

3. Die Ellipse $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ zu quadrieren.

Lösung 1. Soll die Fläche von A (wo $x_0 = 0$ ist) anheben, so ist

$$z = \int_0^x \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \int \frac{b(a^2 - x^2)}{a\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx$$

$$= ab \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx - \frac{b}{a} \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx,$$

daher nach § 64, 13 und 20,

$$= \left[ab \arc(\sin = {}^a/_x) + \frac{bx}{2}\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} - \frac{ab}{2} \arc(\sin = {}^x/_a) \right]_0^x$$

Für $x = 0$ verschwindet dieser Ausdruck, daher

$$z = \frac{bx}{2a}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{ab}{2} \arc(\sin = {}^x/_a).$$

Lösung 2. In $z = \frac{b}{a} \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ setze $x = a \sin \varphi$

$dx = a \cos \varphi\, d\varphi$, so ist

$$z = \frac{b}{a} \int \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi} \cdot a \cos \varphi\, d\varphi.$$

$$= ab \int \cos^2 \varphi\, d\varphi, \text{ also nach § 64, 34}$$

$$= \frac{ab}{2} (\varphi + \tfrac{1}{2} \sin 2\varphi) + c.$$

Digitized by Google

Soll das Integral von $x=0$ (wo dann auch $\varphi=0$) anfangen, so ist $c=0$, daher $z=\frac{ab}{2}(\varphi+\frac{1}{2}\sin 2\varphi)$. Wird hierin φ wieder in x ausgedrückt, nämlich $\varphi=\text{arc}\,(\sin=x/a)$, $\sin 2\varphi=\frac{2x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}$, so wird $z=\frac{bx}{2a}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{ab}{2}\,\text{arc}\,(\sin=x/a)$.

Anmerk. Für $x=a$ ist z, der vierte Teil der Ellipse, gleich $\frac{1}{4}ab\pi$, daher die ganze **Ellipsenfläche** $=ab\pi$.

4. Die Hyperbel $y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ zu quadrieren.

Lösung. $z=\frac{b}{a}\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx$. Setze $x^2-a^2=t^2x^2$, so ist

$$z=\frac{b}{a}\int t\cdot x\,dx=\frac{a}{b}\left(\frac{t}{2}x^2-\int\frac{1}{2}x^2\,dt\right)$$

$$=\frac{b}{a}\left(\frac{t}{2}x^2-\frac{a^2}{2}\int\frac{1}{1-t^2}dt\right)$$

$$=\frac{b}{2a}\left(x\sqrt{x^2-a^2}-a^2\int\frac{1}{1-t^2}dt\right)$$

$$=\frac{b}{2a}\left(x\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\lg\frac{1+t}{1+t}\right)+c$$

Nun ist $t=\frac{1}{x}\sqrt{x^2-a^2}$,

$$\frac{1+t}{1-t}=\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{x-\sqrt{x^2-a^2}},\ \text{daher}$$

$$z=\frac{bx}{2a}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{ab}{4}\lg\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{x-\sqrt{x^2-a^2}}+c.$$

$$=\frac{bx}{2a}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{ab}{2}\lg\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}+c.$$

Soll die Hyperbelfläche im Scheitel B (wo $x=a$) anheben, so ist $c=0$, daher

$$z=\frac{bx}{2a}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{ab}{2}\lg\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}.$$

Digitized by Google

5. Die durch die Asymptotengl. $xy = a^2$ gegebene Hyperbel zu quadrieren.

Lösung. $z = a^2 \int \frac{1}{x}\,dx$

$= a^2 \lg x + c.$

Soll die Hyperbelfläche von BD (wo $x = a$) anheben, so ist, da $0 = a^2 \lg a + c$, also $c = -a^2 \lg a$ sein muß,

$z = a^2 \lg x - a^2 \lg a$ oder

$$z = a^2 \lg \frac{x}{a}.$$

Ist auf der Abscissenasymptote $AE = a/2$, also die zugehörige Ordinate $EP = 2a$, so ist die Fläche $PEDB = a^2 \int_{a/2}^{a} \frac{1}{x}\,dx = a^2 (\lg a - \lg a/2)$

$= a^2 \lg 2.$

6. Die Cykloide $\left.\begin{aligned} x &= a\theta - a \sin\theta \\ y &= a - a\cos\theta \end{aligned}\right\}$ zu quadrieren.

Lösung. Ist $y = f_x$, so ist $z = \int f_x\,dx$, also $dz = f_x\,dx$ und

$$\frac{dz}{dx} = y.$$

Die Fläche z kann als Funktion von θ angesehen werden, daher

$$\frac{dz}{d\theta} = \left(\frac{dz}{dx}\right)\frac{dx}{d\theta}. \quad \text{Nun ist } \frac{dx}{d\theta} = a(1 - \cos\theta)$$

$= ay(1 - \cos\theta) = a^2 (1 - \cos\theta)^2$

$dz = a^2 (1 - \cos\theta)^2 \cdot d\theta$

$z = a^2 \int (1 - \cos\theta)^2 \cdot d\theta = a^2 \int (1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta)\,d\theta$

$= a^2 \int (\tfrac{3}{2} - 2\cos\theta + \tfrac{1}{2}\cos 2\theta)\,d\theta$

$= a^2 (\tfrac{3}{2}\theta - 2\sin\theta + \tfrac{1}{4}\sin 2\theta) + c.$

Soll die Fläche von A anheben, so ist $\theta = 0$, daher zur Bestimmung der Konstante $0 = a^2 \cdot 0 + c$, daher $c = 0$ und

$z = a^2 (\tfrac{3}{2}\theta - 2\sin\theta + \tfrac{1}{4}\sin 2\theta).$

Wird hierin $\theta = 2\pi$ gesetzt, so ergiebt sich die ganze Cykloidenfläche, nämlich $3r^2\pi$. Es ist daher **die Cykloidenfläche dreimal so groß, wie die Fläche des Erzeugungskreises.**

Digitized by Google

7. Die Spirale $r = a\theta$ zu quadrieren.

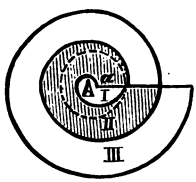
Lösung. Nach § 67 Anm. ist $z = {}^1/_2 \int r^2 \, d\theta = {}^1/_2 \int a^2 \theta^2 \, d\theta$,

$$= \frac{a^2}{6} \theta^3 + c.$$

Hebt die Fläche von $\theta = \varphi$ an, so ist $z = \frac{a^2}{6} (\theta^3 - \varphi^3)$.

Hebt die Fläche von $\theta = 0$ an, so ist $z = \frac{a^2}{6} \theta^3$ oder $= \frac{1}{6} r^2 \theta$.

8. Die archimedische Spirale $r = \frac{a}{2\pi} \theta$ zu quadrieren.



Lösung 1. $z = {}^1/_2 \int r^2 \, d\theta$. Nun ist $d\theta = \frac{2\pi}{a} dr$,

daher $z = \frac{\pi}{a} \int r^2 \, dr$ oder

$$z = \frac{\pi}{3a} r^3 + c.$$

Soll die Fläche mit $r = 0$ anheben, so ist

$c = 0$, also $z = \frac{\pi}{3a} r^3$; daher

für $r = a/_4$ (Viertelumdrehung) $z = \frac{a^2 \pi}{192}$.

für $r = a/_2$ (halbe Umdrehung) $z = \frac{a^2 \pi}{24}$.

für $r = a$ (ganze Umdrehung) $z = \frac{a^2 \pi}{3}$.

Anmerk. Für $\theta = 4\pi$ (zweite völlige Umdrehung, ist $z = \frac{2^3 a^2 \pi}{3}$, daher die Spire II (Fläche zwischen I und II Windung) $= 2a^2\pi$.

Für $\theta = 6\pi$ (dritte völlige Umdrehung) ist $z = \frac{3^3 a^2 \pi}{3}$, daher die Spire III zwischen II und III Windung $= 4a^2\pi$. Ferner die Spire IV zwischen III und IV Windung $= 6a^2\pi$ 2c. Dieses Gesetz hat schon Archimedes gefunden.

Digitized by Google

9. Die Kurve $y = \frac{4}{\sqrt{x}}$ zu quadrieren.

Lösung. Für $x = 0$ ist y unendlich; für $y = 0$ ist x unendlich. Die Ordinatenachse und die positive Seite der Abscissenachse sind Asymptoten. Für positive Ordinaten ist, wenn die Fläche in A anhebt,

$$z = 4\int_0^x x^{-1/2}\,dx$$

$$= 8\sqrt{x} - 8\sqrt{0}.$$

$= 8\sqrt{x}$, also ein endlicher Wert, obgleich sich die Fläche an der Ordinatenachse ins Unendliche erstreckt.

10. Die Exponentiallinie $y = e^x$ zu quadrieren.

Lösung. Soll die Fläche von A anheben, so ist

$$z = \int e^x\,dx = e^x - e^0.$$

$$= e^x - 1.$$

Für $x = -\infty$ ist daher $z = -1\square'$*).

Soll die Fläche von $-\infty$ anheben, so ist

$$z = \int_{-\infty}^{x} e^x\,dx = e^x - e^{-\infty}$$

$$= e^x$$

Für $x = 0$ ist daher $z = +1\square'$.

Anmerk. Für die Exponentiallinie $y = \frac{1}{e^x}$ ist, wenn z in A anhebt,

$$z = \int_0^x \frac{1}{e^x}\,dx = -\frac{1}{e^x} + \frac{1}{e^0}$$

$$= -\frac{1}{e^x} + 1. \quad \text{z. B. für } x = \infty \text{ ist } z = +1\square'$$

*) Daß dieses Resultat negativ ist, kommt daher, daß in der Summationsformel $\int e^x\,dx$ alle Glieder wegen des negativen Faktors dx negativ sind.

Digitized by Google

11. Die Kurve $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ zu quadrieren.

Lösung. $y=(1-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$.

Für $x=0$ ist $y=\pm 1$ | für $x \begin{matrix}>+1\\<-1\end{matrix}$ ist y imaginär.

für $y=0$ ist $x=\pm 1$ | für $y \begin{matrix}>+1\\<-1\end{matrix}$ ist x imaginär.

Hebt die Fläche bei A an, so ist der Inhalt des Quadranten:

$z=\int_0^1 (1-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}\,dx$. Setze $x^{\frac{1}{3}}=\sin\theta$,

| also für $x=0$ $\quad\theta=0$

| für $x=1$ $\quad\theta=\frac{\pi}{2}$

$^1/_3 x^{-\frac{2}{3}}\,dx=\cos\theta\cdot d\theta$

$dx=3\sin^2\theta\cos\theta\cdot d\theta$

$$z=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta\cdot 3\sin^2\theta\cos\theta\cdot d\theta$$

$$=3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\cos^4\theta\cdot d\theta$$

$$=3\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4\theta-\cos^6\theta)\,d\theta$$

| $\cos^4\theta=^1/_8\,(3+4\cos 2\theta+\cos 4\theta)$

| $\cos^6\theta=^1/_{32}\,(10+15\cos 2\theta+6\cos 4\theta+\cos 6\theta)$

$$z=3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big[^3/_8+^1/_2\cos 2\theta+^1/_8\cos 4\theta-(^5/_{16}+^{15}/_{32}\cos 2\theta+^3/_{16}\cos 4\theta+^1/_{32}\cos 6\theta)\Big]\,d\theta.$$

Man braucht hier nur die konstanten Glieder $\frac{3}{8}-\frac{5}{16}=\frac{1}{16}$ mit $d\theta$ zu multiplicieren und zu integrieren, da die Integrale aller anderen Glieder

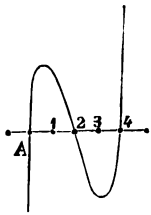
$\sin 2\theta$, $\sin 4\theta$, $\sin 6\theta\cdots$ für $\theta=\frac{\pi}{2}$ und für $\theta=0$ verschwinden, daher

Digitized by Google

$$z = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{16}\,d\theta = \frac{3}{16}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{3}{16}\cdot 0$$
$$= \frac{3}{32}\pi.$$

Daher die Gesamtfläche $= \frac{3}{8}\pi$.

12. Die parabolische Kurve $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ oder $y = x(x-2)(x-4)$ zu quadrieren.



Lösung. Die Kurve schneidet die Abscissenachse für $x = 0, 2, 4$. Die Ordinaten sind positiv für x zwischen O und 2, negativ für x zwischen 2 und 4.

Zur Berechnung der Fläche von $x = o$ bis $x = 4$ hat man:

$$z = \int_0^4 (x^3 - 6x^2 + 8x)\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 4x^2\right]_0^4$$
$$= \tfrac{1}{4}\cdot 256 - 2\cdot 64 + 4\cdot 16$$
$$= o.$$

Dieses ist offenbar ein falsches Resultat.

Hätte man aber den Lauf der Kurve berücksichtigt und erst den oberhalb der x-achse liegenden Teil, und dann den unterhalb liegenden berechnet, so hätte sich ergeben

$$z = \int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x)\,dx + \int_2^4 (x^3 - 6x^2 + 8x)\,dx.$$
$$= \left[\tfrac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 4x^2\right]_0^2 + \left[\tfrac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 4x^2\right]_2^4$$
$$= \frac{1}{4}\cdot 2^4 - 2\cdot 2^3 + 4\cdot 2^2 \quad + \left\{\begin{array}{l} \tfrac{1}{4}\cdot 4^4 - 2\cdot 4^3 + 4\cdot 4^2 \\ -\tfrac{1}{4}\cdot 2^4 + 2\cdot 2^3 - 4\cdot 2^2 \end{array}\right\}$$
$$= 4 + (-4).\ ^*)$$

Der wirkliche Flächeninhalt von $x = o$ bis $x = 4$ ist daher $8\square'$.

---

*) Das Zeichen $-$ kommt daher, daß in der Summationsformel $\int_{x=2}^{x=4} y\,dx$ alle Glieder wegen des negativen Faktors y negativ sind.

Digitized by Google

13. Die Schlinge des **kartesischen Blattes** $y^3 - 3axy + x^3 = 0$ oder $r = \frac{3a \tang\theta}{(1 + \tang^3\theta)\cos\theta}$ zu quadrieren.

Lösung. Nach § 67 Anm. ist

$$z = \tfrac{1}{2}\int r^2\,d\theta = \frac{9a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tang^2\theta}{(1+\tang^3\theta)^2\cos^2\theta}\,d\theta.$$

Setze $\tang\theta = t$, $d\theta = \cos^2\theta \cdot dt$

$$z = \frac{9a^2}{2}\int \frac{t^2}{(1+t^3)^2}\,dt. \quad \text{Setze } \begin{matrix} 1+t^3 = v \\ 3t^2\,dt = dv. \end{matrix}$$

$$z = \frac{9a^2}{6}\int v^{-2}\,dv$$

$$= -\tfrac{3}{2}a^2 v^{-1} = \Big[-\tfrac{3}{2}\frac{a^2}{(1+\tang^3\theta)} \Big]_{\theta=0}^{\theta=\pi/2}$$

$$= \tfrac{3}{2}a^2.$$

14. Die **Kardioide** $r = 4a\cos^2\frac{\theta}{2}$ zu quadrieren.

Lösung. $z = \frac{16a^2}{2}\int_0^{2\pi} \cos^4\theta/_2\,d\theta$. Drückt man $\cos^4\theta/_2$ durch

$\frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2\,\theta/_2 + \frac{1}{8}\cos 4\,\theta/_2$ aus, so ist

$$z = 8a^2\int_0^{2\pi} (\tfrac{3}{8}\,d\theta + \tfrac{1}{2}\cos\theta \cdot d\theta + \tfrac{1}{8}\cos 2\theta \cdot d\theta)$$

$$= 8a^2 \Big[\tfrac{3}{8}\theta + \tfrac{1}{2}\sin\theta - \tfrac{1}{16}\sin 2\theta \Big]_{\theta=0}^{\theta=2\pi}$$

$$= 6a^2\pi.$$

Digitized by Google

Zwölfter Abschnitt.

Komplanation und Kubatur der Revolutionskörper.

§ 69. Ist $y = f_x$ die Gleichung einer Kurve, welche um die Achse AX rotiert, so ist durch den Bogen P_0P (dessen Endpunktabsciffen $AQ_0 = x_0$ u. $AQ = x$ sind) beschriebene Fläche

$$F = 2\pi \int_{x_0}^{x} f_x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx$$ und das Volumen

des durch die Fläche Q_0P_0PQ beschriebenen Rotationskörpers

$$V = \pi \int_{x_0}^{x} (f_x)^2 dx.$$

Beweis. Es wachse AQ um $QS = dx$, und dadurch PQ um dy; dann ist die Sehne $PR = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx$, daher die durch PR beschriebene cylindrische Fläche $dF = 2y\pi \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx$, daher

$$F = 2\pi \int_{x_0}^{x} f_x \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx.$$

Ferner ist der durch QPRS beschriebene Rotationskörper

$$dV = y^2\pi \cdot dx, \text{ daher}$$

$$V = \pi \int_{x_0}^{x} (f_x)^2 \cdot dx.$$

Digitized by Google

§ 70. Aufgaben.

1. Wie groß ist die Fläche, welche der um die Achse AX rotierende Kreisbogen P_0P beschreibt?

Lösung. $y^2+x^2=r^2$, daher $2y\,dy+2x\,dx=0$, $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$;

$$F=2\pi\int_{x_0}^{x}\sqrt{(r^2-x^2)\,(1+x^2/y^2)}\cdot dx$$

$$=2\pi\int_{x_0}^{x}\sqrt{y^2+x^2}\cdot dx$$

$$=2r\pi\int_{x_0}^{x}dx=2r\pi\,(x-x_0)$$

Zusatz. Für $x_0=0$ und $x=r$ ergiebt sich die halbe Kugeloberfläche $2r^2\pi$.

2. Wie groß ist die Fläche, welche der um AX rotierende Parabelbogen AP (dessen Gl. $y=\sqrt{ax}$) beschreibt?

Lösung. $F=2\pi\int_0^x\sqrt{ax\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}\cdot dx.$ $\quad 2y\,dy=a\,dx.$ $\quad \frac{dy}{dx}=\frac{a}{2\sqrt{ax}}$

$$=2\pi\int_0^x{}^1/_2\sqrt{4ax+a^2}\cdot dx$$

$$=\pi\sqrt{a}\int_0^x\sqrt{4x+a}\cdot dx$$

$$=\frac{\pi\sqrt{a}}{6}\Big[(4x+a)^{\frac{3}{2}}\Big]_x^0$$

$$=\frac{\pi}{6}\Big[(4x+a)^{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{a}-a^2\Big]$$

Digitized by Google

3. Wie groß ist die Fläche, welche der Bogen des um die große Achse AX rotierenden Ellipsenquadranten beschreibt? ($y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$).

Lösung. $F = 2\pi\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{(a^2-x^2)\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}\,dx \Big| \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}$

$$= \frac{2b\pi}{a}\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{x^2+\frac{a^2}{b^2}(a^2-x^2)}\,dx.$$

$$= \frac{2b\pi}{a^2}\int_0^a \sqrt{a^4-(a^2-b^2)x^2}\,dx. \text{ Setze } a^2-b^2=c^2.$$

$$= \frac{2bc\pi}{a^2}\int_0^a \sqrt{\frac{a^4}{c^2}-x^2}\,dx. \text{ Setze } \frac{a^2}{c}=\delta$$

$$= \frac{2bc\pi}{a^2}\int_0^a \sqrt{\delta^2-x^2}\,dx, \text{ also nach § 68, 3}$$

$$= \frac{2bc\pi}{a^2}\left[\frac{x}{2}\sqrt{\delta^2-x^2}+\frac{\delta^2}{2}\arc(\sin=x/\delta)\right]_0^a$$

d. h. die halbe Ellipsoidoberfläche $= \frac{2bc\pi}{2^2}\left(a^2\sqrt{\frac{a^4}{c^2}-a^2}+\frac{a^4}{2c^2}\arc[\sin=c/a]\right)$

$$= b^2\pi+\frac{a^2b\pi}{c}\arc(\sin=c/a).$$

Zusatz. Die ganze Ellipsoidfläche $= 2b^2\pi+\frac{2a^2b\pi}{c}\arc(\sin=c/a)$.

Anm. 1. Das durch Drehung der Ellipse um die kleine Achse entstehende Ellipsoid hat die Oberfläche $2a^2\pi+\frac{2ab^2\pi}{c}\lg\frac{a+c}{b}$.

Anm. 2. Für $b=a$ ergiebt sich aus beiden Formeln als Kugeloberfläche $4a^2\pi$.

4. Das Paraboloid zu berechnen, welches durch Drehung des Parabelbogens AP ($y^2 = ax$) um die Achse AX entsteht.

Digitized by Google

Lösung. $V = \pi \int_0^x ax\,dx$

$= \frac{1}{2} ax^2\pi$

Anmerk. Da aus der Parabelgl. folgt $ax^2 = y^2x$, so ist $V = x/_2 \cdot y^2\pi$, daher **das Paraboloid halb so groß, wie der Cylinder, dessen Höhe x, dessen Radius y ist.**

5. Das Ellipsoid zu berechnen, welches durch Drehung der halben Ellipse $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1\right)$ um ihre große Achse entsteht.

Lösung. $V = \pi \int_{-a}^{+a} (f_x)^2\,dx$

$= \pi \int_{-a}^{+a} \frac{a^2b^2 - b^2x^2}{a^2}\,dx$

$= \frac{b^2\pi}{a^2} \int_{-a}^{+a} (a^2 - x^2)\,dx$

$= \frac{b\pi}{a^2} \left[a^2x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-a}^{+a} = \frac{4}{3} ab^2\pi.$

Anmerk. Das durch Drehung der halben Ellipse um die kleine Achse entstehende Ellipsoid ist $= \frac{4}{3} a^2b\pi$.

6. Den durch Drehung der Cykloide um ihre Achse entstehenden Rotationskörper zu berechnen.

Lösung. Da $x = a(\theta - \sin\theta)$

$y = a(1 - \cos\theta)$, so ist

$V = \pi \int_0^x y^2 dx$, worin $dx = a(d\theta - \cos\theta \cdot d\theta)$,

$= a^3\pi \int_0^{2\pi} (1 - \cos\theta)^3$. Setze $(1 - \cos\theta)^3 = A + B\cos\theta + C\cos 2\theta + D\cos 3\theta$.

Durch successive Annahme von $\theta = 0$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, π ergeben sich für A, B, C, D vier Bestimmungsgleichungen und aus diesen für A, B, C, D die Werte $\frac{5}{2}, -1\frac{5}{4}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{4}$, daher

$V = a^3\pi \int \frac{5}{2} - 1\frac{5}{4}\cos\theta + \frac{3}{2}\cos 2\theta - \frac{1}{4}\cos 3\theta)\,d\theta.$

$= a^3\pi \left[\left(\frac{5}{2}\theta - 1\frac{5}{4}\sin\theta + \frac{3}{4}\sin 2\theta - 1\frac{1}{12}\sin 3\theta\right) \right]_0^{2\pi}$

$= 5a^3\pi^2.$

Digitized by Google

Dreizehnter Abschnitt.

Integration der Differentialgleichungen.

§ 71. Erklärungen. Eine Gleichung, in welcher veränderliche Größen mit ihren Differentialen vorkommen, heißt Differentialgleichung. Diejenige Gleichung, aus welcher die Differentialgleichung abgeleitet werden kann, heißt die zugehörige Integralgleichung. Letztere muß so beschaffen sein, daß die aus ihr gezogenen Werte der abhängigen Veränderlichen und ihrer Differentiale nach Substitution in die Differentialgleichung dieser genügen, z. B.

(1) . . . . . $2y\,dy = a\,dx$ ist eine Differentialgl.

(2) . . . . . $y^2 = ax$ ist die zugehörige Integralgleichung. Hieraus ist $y = \sqrt{ax}$ und $dy = \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{x}}\,dx$;

diese Werte geben, in (1) substituiert, $2\sqrt{ax} \cdot \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{x}}\,dx = a\,dx$.

Die Differentialgleichungen heißen erster, zweiter, dritter Ordnung, wenn darin die Differentiale I, II, III Ordnung der abhängig Veränderlichen (dy, d^2y, d^3y . . .) vorkommen; sie heißen ersten, zweiten, dritten . . . Grades, wenn dy in erster, zweiter, dritter Potenz in ihnen vorkommt. Wir betrachten hier nur die

Differentialgleichungen I. Ordnung und I. Grades.

§ 72. Für die Integration der Differentialgleichungen, die in den meisten Fällen sehr schwierig ist, sind nur wenige allgemeine Methoden bekannt.

Digitized by Google

A. Die unmittelbare Integration ist möglich, wenn die Differentialgleichung durch Differentiation einer Funktion $F_{x,y} = 0$ entstanden ist.

Da nämlich durch Differentiation von $F_{x,y} = 0$ sich ergiebt

$$\left(\frac{dF}{dy}\right) dy + \left(\frac{dF}{dx}\right) dx = 0 \text{ und } d^2F_{x,y} = d^2F_{y,x},$$

so würde die gegebene Differentialgleichung $P\,dy + Q\,dx = 0$, worin P und Q Funktionen von x und y, als durch unmittelbare Differentiation einer $F_{x,y}$ entstanden sich ansehen lassen, „ein vollkommenes Differential" sein, wenn

$\frac{dP}{dx} = \frac{dQ}{dy}$ ist. In diesem Falle integriere man $P\,dy$ nach y, wobei das in P enthaltene x vorläufig als konstant anzusehen ist. Da nun in der zu addierenden Konstanten noch eine φ_x stecken kann, so ist diese noch zu dem erhaltenen Integrale zu addieren. Der Wert dieser φ_x ergiebt sich, indem man das erhaltene Integral wieder differentiiert und das Resultat mit der gegebenen Differentialgleichung vergleicht.

Beispiele.

1. $(3y^2 - 2x^2)\,dy + (3x^2 - 4xy)\,dx = 0.$

Da das Differential von $3y^2 - 2x^2$ nach x gleich ist dem Differential von $3x^2 - 4xy$ nach y, so ist die gegebene Gleichung ein vollkommnes Differential, daher die Integralgleichung:

$\int (3y^2 - 2x^2)\,d\varphi = 0$

$y^3 - 2x^2y + \varphi x + c = 0$. Wird wieder differentiiert, so ist

$3y^2dy - 2x^2dy - 4xy\,dx + \varphi x + c = 0.$

$$(3y^2 - 2x^2)\,dy + \left(\frac{d\varphi}{dx} - 4xy\right) dx = 0.$$

Durch Vergleichung mit der gegebenen Gl. ergiebt sich $\frac{d\varphi}{dx} = 3x^2$

$\varphi = \int 3x^2\,dx = x^3$, daher

$y^3 - 2x^2y + x^3 + c = 0$ die gesuchte Integralgleichung.

2. $(2ay + bx + e)\,dy + (2gx + by + h)\,dx = 0.$

Da das Differential von $2ay + bx + e$ nach x gleich ist dem von $2gx + by + h$ nach y, so ist die geg. Gleichung ein vollkommenes Differential, daher die dazugehörige Integralgleichung: $\int (2ay + bx + e)\,dy = 0$,

Digitized by Google

$ay^2+bxy+ey+\varphi x+c=o$. Wird wieder differentiiert, so ist

$(2ay+bx+e)\,dy+(by+d\varphi/dx)\,dx=o$.

Durch Vergleichung mit der geg. Gl. ergiebt sich $\frac{d\varphi}{dx}=2gx+h$, daher

$\varphi=\int(2gx+h)\,dx=gx^2+h$, daher die gesuchte Integralgl.:

$ax^2+bx\,y+ey+gx^2+hx+c=o$.

3. $\frac{1}{x}\,dy-\frac{y}{x^2}\,dx=o$.

Da das Differential von $\frac{1}{x}$ nach x gleich ist dem von $\frac{y}{x^2}$ nach y, so ist die Bedingung der Integrabilität erfüllt. Daher

$\int {}^1/x\,dy={}^1/x\,y+\varphi x+c=o$. Wird wieder differentiiert, so ist

$${}^1/x\,dy-y\cdot x^{-2}dx+d\varphi=o.$$

$${}^1/x\,dy-(y/x^2-d\varphi/dx)=o.$$

Durch Vergleichung mit der geg. Gl. ergiebt sich $d\varphi=o$, daher φ konstant, daher ${}^1/x\,y+c=o$ die gesuchte Integralgleichung.

4. $x\,dy-y\,dx=o$. Hier ist das Differential von x nach x nicht gleich dem von $-y$ nach y, daher ist die Bedingung der Integrabilität nicht erfüllt, also $x\,dy-y\,dx$ nicht das Differential einer $F_{x,y}$. Aber die hieraus durch Multiplikation mit $\frac{1}{xy}$ entstehende Gleichung

$\frac{1}{y}\,dy-\frac{1}{x}\,dx=o$ ist integrabel, da das Differential von $\frac{1}{y}$ nach x gleich ist dem von $-\frac{1}{x}$ nach y, nämlich beide $=o$. Als die der Gleichung

$\frac{1}{y}\,dy-\frac{1}{x}\,dx=o$ entsprechende Integralgleichung ergiebt sich

$$\lg y-\lg x+c=o, \text{ woraus}$$

$$\lg\frac{y}{x}=\lg k \text{ oder } y=kx.$$

Anm. Diejenige $f_{x,y}$ womit eine die Bedingung der Integrabilität nicht erfüllende Differentialgl. multipliciert werden muß, um integrabel zu werden, heißt „**der integrierende Faktor**". Für Gl. 4) z. B. $\frac{1}{xy}$.

Die Auffindung eines solchen integrierenden Faktors ist im allgemeinen sehr schwierig.

Digitized by Google

B. Integration mittelst Separation der Veränderlichen.

1. $x\,dy - y\,dx = 0$.

$$\frac{1}{y}\,dy - \frac{1}{x}\,dx = 0$$

$\lg y - \lg x = c$ (oder bequemer $= \lg a$)

$y - ax = 0$.

2. $x\,dy + y\,dx = 0$

$$\frac{1}{y}\,dy + \frac{1}{x}\,dx = 0$$

$\lg y + \lg x = c = \lg a$, daher $yx = a$.

C. Die Integration mittelst Substitution einer dritten Veränderlichen ist dann stets möglich, wenn die geg. Differentialgleichung homogen ist, d. h. wenn in allen Gliedern die Summe der Exponenten der Veränderlichen dieselbe ist.

1. $xy\,dy + (x^2 + y^2)\,dx = 0$. Setze $y = tx$, so ist

$dy = x\,dt + t\,dx$, daher

$(x^2 + 2t^2x^2)\,dx + x^3 t\,dt = 0$

$(1 + 2t^2)\,dx + tx\,dt = 0$

$$\frac{dx}{x} + \frac{t\,dt}{1+2t^2} = 0, \text{ daher durch Integration}$$

$$\lg x + \tfrac{1}{4}\lg(1 + 2t^2) = \lg c \text{ oder}$$

$$\lg x + \tfrac{1}{4}\lg(x^2 + 2y^2) - \tfrac{1}{2}\lg x = \lg c$$

$$\lg x + \tfrac{1}{2}\lg(x^2 + 2y^2) = 2\lg c$$

$$x\sqrt{x^2 + 2y^2} = c^2$$

$$x^4 + 2x^2y^2 = c^4$$

$$x^2y^2 + \tfrac{1}{2}x^4 = a^4.$$

2. $(y - x)\,dy + (y + x)\,dx = 0$. Setze $y = tx$, $dy = x\,dt + t\,dx$.

$(tx - x)(x\,dt + t\,dx) + (tx + x)\,dx = 0$.

$$\frac{t-1}{t^2+1}\,dt + \frac{dx}{x} = 0, \text{ daher durch Integration}$$

$\frac{1}{2}\lg(t^2 + 1) - \operatorname{arc}(\operatorname{tg} = t) + \lg x = \lg a$ und durch Wiedereinführung von x:

$$\lg(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} - \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{y}{x}\right) = \lg a.$$

$$\lg\frac{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}{a} = \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{y}{x}\right).$$

Digitized by Google

$1/a\sqrt{x^2+y^2} = e^{\text{arc}(\tan g = y/x)}$

3. $y\,dy + 2x\,dx = dx\sqrt{2x^2+y^2}$. Setze $y = tx$, $dy = x\,dt + t\,dx$.

$tx\,dt + (t^2+2)\,dx = dx\sqrt{t^2+2}$

$(t^2+2-\sqrt{t^2+2})\,dx + tx\,dt = 0$

$\frac{dx}{x} + \frac{t\,dt}{t^2+2-\sqrt{t^2+2}} = 0.$ Setze $t^2+2 = u^2$, $t\,dt = u\,du$.

$\frac{dx}{x} + \frac{du}{u-1} = 0$, daher $\lg x + \lg(u-1) = c$

$\lg[x(u-1)] = c$, daher auch

$x(u-1) = c$ und durch Wiedereinführung von y:

$\sqrt{x^2+2x^2} = c + x$

$y^2 + x^2 = 2cx + c^2$.

Die Integration mittelst Substitution gelingt auch dann zuweilen, wenn die Differentialgleichung nicht homogen ist. Setzt man z. B. in der nicht homogenen Differentialgleichung

$(y-x)\,dy - a\,dx = 0$ $\quad y - x = t$ und $dy - dx = dt$, so ist

$t(dt+dx) - a\,dx = 0$, woraus $dx = -\frac{t\cdot dt}{t-a}$, daher

$x = -\int \frac{t}{t-a}\,dt = -\int t\cdot\frac{1}{t-a}\,dt$

$= -t\lg(t-a) + \int \lg(t-a)\,dt$, also nach § 64, 21

$x = -t\lg(t-a) + (t-a)\lg(t-a) - t + a + c$ oder

$x = -a\lg(t-a) + c$

$= -a\lg(y-x-a) + c$.

§ 73. Übungsaufgaben.

1. Diejenige Kurve zu finden, bei welcher die Subtangente stets gleich der Abscisse ist.

Lösung. Es soll $y\cdot\frac{dx}{dy} = x$ oder $y\,dx - x\,dy = 0$ sein. Durch Separation ergiebt sich $\left(\text{aus } \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} = 0\right)$ $\lg x - \lg y = c = \lg a$.

$\lg y = \lg ax$.

$y = ax$, d. h. eine gerade Linie.

2. Bei welcher Kurve ist die Subtangente stets gleich der doppelten Abscisse?

Lösung. $y^2 = ax$.

Digitized by Google

3. Bei welcher Kurve ist das Quadrat der Subtangente $=2x$?

Lösung. $y^2\frac{dx^2}{dy^2}=2x$ oder $y\,dx=dy\sqrt{2x}$.

$\frac{dx}{\sqrt{2x}}=\frac{dy}{y}$. Hieraus durch unmittelbare Integration:

$\frac{1}{\sqrt{2}}\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx=\lg y$

$\frac{2x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}}+\lg c=\lg y$

$\lg e^{\sqrt{2x}}+\lg c=\lg y$

$y=c\cdot e^{\sqrt{2x}}$.

4. Bei welcher Kurve ist die Subtangente stets $=y-x$?

Lösung. $y\cdot\frac{dx}{dy}=y-x$ oder $y\,dx=(y-x)\,dy$. Setze $y=tx$.

$tx\cdot dx=(tx-x)\,(x\,dt+t\,dx)$

$(2tx-t^2)\,dx=x\,(t-1)\,dt$.

$$\frac{dx}{x}=\frac{(t-1)\,dt}{t\,(2t-1)}=\left(\frac{M}{t}+\frac{N}{2t-1}\right)dt$$

$$=-\frac{\frac{1}{2}}{t}\,dt+\frac{\frac{1}{2}}{2-1}\,dt$$

$\lg x=-\frac{1}{2}\lg t-\frac{1}{2}\int\frac{1}{t-2}\,dt$

$=-\frac{1}{2}\lg t-\frac{1}{2}\lg(t-2)+c$

$2\lg x=-\lg\frac{y}{x}-\lg\frac{y-2x}{x}+c$

$\lg x^2+\lg\frac{y\,(y-2x)}{x^2}=c=\lg a^2$

$\lg y\,(y-2x)=\lg a^2$

$y^2-2xy=a^2$.

5. Bei welcher Kurve ist die Tangente bis zur Abscissenachse stets von konstanter Länge a?

Lösung. $y\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}=a$ oder $y^2+y^2\frac{dx^2}{dy^2}=a^2$

$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y}\sqrt{a^2-y^2}$. Setze $\sqrt{a^2-y^2}=ty$, also $y=\frac{x}{\sqrt{t^2+1}}$

Digitized by Google

$$x = \int t \cdot dy = yt - \int y\, dt$$

$$ty = a \int \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\, dt,$$

$$ty = a \lg (t + \sqrt{t^2+1}) + c \text{ oder}$$

$$x = \sqrt{a^2-y^2} - a \lg \left(\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y} \right) + c.$$

Anm. Für c = 0 wird das zu x = 0 gehörige y gleich a, und es entsteht

$$x = \sqrt{a^2-y^2} - a \lg \left(\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y} \right),$$ die Gl. der „Traktorie".

6. Bei welcher Kurve ist die Tangente stets gleich der vom Anfangspunkte nach dem Berührungspunkte gezogenen Linie?

Lösung. $y \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = \sqrt{x^2+y^2}$ oder $y\, dx = \pm x\, dy$.

$$y \frac{dx}{dy} = \pm x.$$

$\frac{1}{y} dy - \frac{1}{x} dx = c$	$\frac{1}{y} dy + \frac{1}{x} dx = c.$
$\lg y - \lg x = \lg a$	$\lg y + \lg x = \lg a$
$y = ax$	$y = a/x.$

7. Bei welcher Kurve ist das Lot vom Anfangspunkte auf die Tangente stets gleich der Abscisse des Berührungspunktes?

Lösung. $\left(y \frac{dx}{dy} - x\right) \left(= \frac{x}{\sin \tau}\right) = \frac{x \sqrt{dx^2+dy^2}}{dy}$ oder

$$(y\, dx - x\, dy)^2 = x^2 dx^2 + x^2 dy^2 \text{ oder}$$

$$\mathbf{(y^2-x^2)\, dx - 2xy\, dy = 0.}$$ Diese Differentialgl. ist homogen, daher integrierbar. Es resultiert $y = \sqrt{ax - x^2}$.

8. Bei welcher von A anhebenden Kurve ist die Fläche zwischen Abscisse, Bogen und Ordinate $= \frac{2}{3} xy$?

Lösung. $\int_0^x y\, dx = \frac{2}{3} xy$, daher durch Differentiieren

$$y\, dx = \frac{2}{3} y\, dx + \frac{2}{3} x\, dy \text{ oder}$$

$$\mathbf{2x\, dy - y\, dx = 0}$$

Digitized by Google

$$\frac{2\,dy}{y} - \frac{dx}{x} \quad o$$
$$2 \lg y - \lg x = \lg a$$
$$y^2 = ax.$$

9. Bei welcher Kurve ist das Quadrat jedes von A anhebenden Bogens $= ax$?

Lösung. $s^2 = ax$ oder $\int_o^x \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \sqrt{ax}$.

Durch Differentiieren: $\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{x}}$

$$dx^2 + dy^2 \quad \frac{a}{4x}\,dx^2$$

$dy = dx\sqrt{\frac{a-4x}{4x}}$. Setze $\frac{a-4x}{4x} = t^2$, also

$$x = \frac{a}{4(t^2+1)}.$$

$$dy = t\,dx$$
$$y \quad \int t\,dx = tx - \int x\,dt$$
$$tx - a/4 \int \frac{1}{t^2+1}\,dt$$
$$tx - a/4 \arc(\tang = t) + c.$$

$$y = \frac{1}{2}\sqrt{ax - 4x^2} - \frac{a}{4}\arc\left(\tg = \sqrt{\frac{a-4x}{4}}\right) + c^*) \text{ oder}$$

$$y = \frac{1}{2}\sqrt{ax - 4x^2} - \frac{a}{4}\arc\left(\cos = \sqrt{\frac{4x}{a}}\right) + c.$$

Da für $x=o$ auch $y=o$ sein muß, so ist

$$o = -\frac{a}{4}\arc\left(\tg = \sqrt{\frac{a}{o}}\right) + c, \text{ daher } c = \frac{a}{4}\cdot\frac{\pi}{2} \text{ und}$$

---

*) Wenn $\tang \varphi = \sqrt{\frac{a-b}{b}}$, so ist $\cos \varphi = \sqrt{\frac{b}{a}}$ daher $\arc\left(\tg = \sqrt{\frac{a-b}{b}}\right) = \arc\left(\cos = \sqrt{\frac{b}{a}}\right)$.

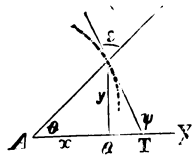
Digitized by Google

$$y = \tfrac{1}{2}\sqrt{ax - 4x^2} + \frac{a}{4}\left(\frac{\pi}{2} - \arccos\left[\sqrt{\frac{4x}{a}}\right]\right)$$

$$y = \tfrac{1}{2}\sqrt{ax - 4x^2} + \frac{a}{4}\arcsin\left(\sqrt{\frac{4x}{a}}\right) \text{ oder}$$

$$y = \tfrac{1}{2}\sqrt{ax - 4x^2} + \frac{a}{4}\left(\cos\sqrt{\frac{a-4x}{a}}\right).$$

Die gesuchte Kurve ist daher eine Cykloide.



10. Die Trajektorie zu finden, welche alle durch A gehenden Geraden unter demselben Winkel ε schneidet. („Trajektorie") heißt diejenige Linie, welche ein System von Linien nach einem bestimmten Gesetze schneidet.)

Lösung. Es sei $y = mx$ die Gl. aller durch A gehenden Geraden, so daß m für jede dieser Geraden einen anderen Wert hat. Ist P ein Punkt der Trajektorie, $AQ = x$, $PQ = y$, der ∠, den die Tangente an die Trajektorie mit der Abscissenachse bildet, ψ, der $\angle PAX$ θ, so ist

$\varepsilon = \psi - \theta$, daher

$$\operatorname{tang}\varepsilon = \frac{\operatorname{tg}\psi - \operatorname{tg}\theta}{1 + \operatorname{tg}\psi \cdot \operatorname{tg}\theta}, \text{ worin } \operatorname{tg}\psi = \frac{dy}{dx},$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}; \text{ daher}$$

$$\operatorname{tang}\varepsilon = \frac{x\,dy - y\,dx}{x\,dx + y\,dy} \text{ die Differentialgl. der gesuchten Trajektorie.}$$

Da sie homogen ist, so setze $y = tx$, $dy = x\,dt + t\,dx$.

$$\operatorname{tg}\varepsilon \cdot dx + \operatorname{tg}\varepsilon \cdot t\,(x\,dt + t\,dx) = x\,dt$$

$$\operatorname{tg}\varepsilon \cdot dx + t^2 \cdot \operatorname{tg}\varepsilon \cdot dx + t \cdot \operatorname{tg}\varepsilon \cdot x\,dt = x\,dt$$

$$\operatorname{tg}\varepsilon \frac{dx}{x} + \frac{(t \cdot \operatorname{tg}\varepsilon - 1)\,dt}{t^2 + 1} = 0$$

$$\operatorname{tg}\varepsilon \cdot \lg x + \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}\varepsilon \cdot \lg(t^2+1) - \operatorname{arc}(\operatorname{tg} = t) = 0$$

$$\operatorname{tg}\varepsilon \cdot \lg x + \operatorname{tg}\varepsilon \cdot \lg\sqrt{(t^2+1)} - \operatorname{arc}(\operatorname{tg} = t) = 0$$

$$\operatorname{tg}\varepsilon \cdot \lg\sqrt{x^2+y^2} = \operatorname{arc}(\operatorname{tg} = y/x).$$

Durch Einführung der Polarkoordinaten $r = \sqrt{x^2+y^2}$ $\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}$, also $\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{y}{x}\right) = \theta$, entsteht

$$\operatorname{tg}\varepsilon \cdot \lg r = \theta$$

$$\lg r^{\operatorname{tg}\varepsilon} = \theta, \text{ daher } r^{\operatorname{tg}\varepsilon} = e^{\theta}.$$

Digitized by Google

Zusatz. Soll die Trajektorie das durch A gehende Linienſyſtem unter einem Winkel von 45° ſchneiden, ſo iſt $\lg \sqrt{x^2+y^2} = \operatorname{arc}(\operatorname{tg} = y/x)$ und

$$r = e^{\theta}.$$ (Die Exponentialſpirale.)

Soll die Trajektorie daſſelbe Linienſyſtem rechtwinklig ſchneiden, ſo iſt da $\operatorname{tg} \varepsilon = \infty$, $r^{\infty} = e^{\theta}$. Es muß deshalb auf die Differentialgleichung der Trajektorie zurückgegangen werden:

$$\infty = \frac{x\,dy - y\,dx}{x\,dx + y\,dy}$$

$x\,dx + y\,dy = 0$, daher $x^2 + y^2 = c$. (Der Kreis.)

11. Die Trajektorie zu finden, welche ſämtliche Parabeln $y^2 = mx$ unter demſelben Winkel ε ſchneidet.

Löſung. $\operatorname{tang} \varepsilon = \frac{\operatorname{tg} \psi - \operatorname{tg} \theta}{1 + \operatorname{tg} \psi \cdot \operatorname{tg} \theta}$, worin $\operatorname{tg} \psi = \frac{dy}{dx}$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{2x}$$ (= Subt. d. P.)

$$\operatorname{tang} \varepsilon = \frac{2x\,dy + y\,dx}{2x\,dx + y\,dy}$$ die Differentialgl. der geſ. Trajektorie.

Zuſatz. Soll das durch A gehende Parabelſyſtem von der Trajektorie rechtwinklig geſchnitten werden, ſo iſt $2x\,dx + y\,dy = 0$, daher die Gl. der Trajektorie $y^2 + 2x^2 = c$.

12. Die Trajektorie zu finden, welche alle Parabeln $y^2 = mx$ ſo ſchneidet, daß die Fläche zwiſchen dem Parabelbogen und den Koordinaten des Durchſchnitts konſtant $= a^2$ iſt.

Löſung. $\frac{2}{3}xy = a^2$, daher die Trajektorie $y = \frac{3a^2}{2x}$, eine Hyperbel.

13. Die Trajektorie zu finden, welche alle über derſelben Abſciſſenachſe konſtruierten koncentriſchen ähnlichen Ellipſen, bei denen alſo $b/a = b_1/a_1 = b_{11}/a_{11} \ldots$ iſt, rechtwinklig ſchneidet.

Löſung. Die Gleichungen des geg. Ellipſenſyſtems ſeien $\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1$ und ſämtliche b/a, konſtant $= k$.

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\operatorname{tg} \psi - \operatorname{tg} \theta}{1 + \operatorname{tg} \psi \cdot \operatorname{tg} \theta}, \text{ worin } \operatorname{tg} \psi = \frac{dy}{dx},$$

$$\operatorname{tg} \theta = -k^2 \frac{x}{y}.$$

Digitized by Google

$$x = \frac{dy}{dx} + k^2 \cdot \frac{x}{y}$$

$$1 - k^2 \cdot \frac{x}{y}\frac{dy'}{dx} \quad \text{daher}$$

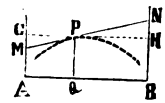
$$1 - k^2 \cdot \frac{x}{y}\frac{dy}{dx} = o$$

$$k^2 \frac{dy}{y} - \frac{1}{x}\,dx = o$$

$$\lg y^{(k)^2} = \lg cx \quad \text{oder}$$

$$y^{(a/b)^2} = cx.$$

Zuſatz. Die Trajektorie, welche alle koncentriſchen Kreiſe rechtwinklig ſchneidet, iſt $y = cx$, alſo eine Gerade durch A.

14. 

Zwiſchen den in den Endpunkten von $AB = 2a$ errichteten Perpendikeln eine ſolche Kurve $y = f_x$ zu finden, daß jede an dieſe gezogene Tangente, z. B. MN, zwei Stücke AM und BN von den Perpendikeln abſchneidet, deren Produkt konſtant ($= b^2$) iſt.

Löſung. Ziehe $GPH \mp AB$, ſo iſt $\operatorname{tg} NPH = \operatorname{tg} MPG = \frac{dy}{dx}$ und

$$AM = y - x \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$BN = y + (2a - x)\frac{dy}{dx}. \quad \text{Es ſoll alſo}$$

$$(1) \quad \left(y - x \cdot \frac{dy}{dx}\right)\left(y + 2a\,\frac{dy}{dx}\right) = b^2 \text{ ſein.}$$

Setze $y - x\,\frac{dy}{dx} = v$, ſo iſt

$$v^2 + 2a\frac{dy}{dx}\,v = b^2. \quad \text{Addiere } a^2\frac{dy^2}{dx^2}$$

$$\left(v + a\,\frac{dy}{dx}\right)^2 = b^2 + a^2\frac{dy^2}{dx^2}$$

$$v = -a\,\frac{dy}{dx} + \sqrt{b^2 + a^2\frac{dy^2}{dx^2}}$$

$$(2) \quad y = x\,\frac{dy}{dx} - a\,\frac{dy}{dx} + \sqrt{b^2 + a^2\frac{dy^2}{dx^2}}. \quad \text{Setze } \frac{dy}{dx} = p; \quad \text{dann}$$

wird durch Differentiieren

Digitized by Google

$$dy = p\,dx + x\,dp - a\,dp + \frac{a^2 p\,dp}{\sqrt{b^2 + a^2 p^2}}$$

$$0 = \left(x - a + \frac{a^2 p}{\sqrt{b^2 + a^2 p^2}}\right) dp.$$

Wird dp gleich o gesetzt, so wird p oder $\frac{dy}{dx}$ konstant, $= c$, also ist die gesuchte Kurve eine gerade Linie. Für sie geht Gl. (2) über in

3) $y = cx - ca + \sqrt{b^2 + a^2 c^2}$. Daß diese gerade Linie der Forderung genügt, ist klar, denn für jeden ihrer Punkte (x, y) fällt die Tangente an sie mit ihr selbst zusammen, und ist

$$AM = -ac + \sqrt{b^2 + a^2 c^2}$$

$$BN = ac + \sqrt{b^2 + a^2 c^2}$$

also $AM \cdot BN = b^2$.

Wird aber $x - a + \frac{a^2 p}{\sqrt{b^2 + a^2 p^2}}$ gleich o gesetzt, so wird mit Hilfe von 2)

4) $y = {}^b/_a \sqrt{2ax - x^2}$, eine Ellipse, welche ebenfalls den Differentialgleichungen 1) und 2) genügt.

Anm. Die Gleichung 3), welche die beliebige Konstante c enthält, heißt das „allgemeine oder vollkommene Integral der Gl. 1). Aus ihm gehen für besondere Werte, welche c gegeben werden, specielle oder besondere Integrale hervor, welche sämtlich dieselbe Art Linien ausdrücken. Die Gleichung 4), welche ebenfalls der Differentialgl. 1) genügt, und welche nicht durch Integration, sondern durch Differentiation gefunden worden ist, heißt eine „besondere Auflösung" der Gl. 1). Lagrange zeigte, daß die besonderen Auflösungen einer Differentialgleichung, welche man früher für unzulässig hielt, aus dem allgemeinen Integrale abgeleitet werden können.

Digitized by Google

Vierzehnter Abschnitt.

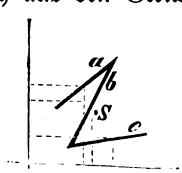
Anwendung der Integralrechnung auf die Bestimmung des Schwerpunktes.

§ 74. Hilfssatz. Das statische Moment des Ganzen ist gleich der Summe der statischen Momente der Teile. (Das Ganze mal dem Abstande seines Schwerpunktes von der Abscissen- oder Ordinatenachse ist gleich der Summe der Produkte aus den Teilen und den Abständen ihrer Schwerpunkte.)

A. Schwerpunkt von Linien.

§ 75. Der Schwerpunkt einer Geraden ist ihr Halbierungspunkt.

§ 76. Die Koordinaten ξ und η des Schwerpunktes einer aus den Teilen a, b, c bestehenden gebrochenen Linie finden sich aus den Gleichungen



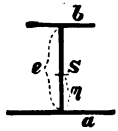
$$(a+b+c)\,\xi = a\xi_1 + b\xi_2 + c\xi_3$$
$$(a+b+c)\,\eta = a\eta_1 + b\eta_2 + c\eta_3,$$

nämlich

$$\xi = \frac{a\xi_1 + b\xi_2 + c\xi_3}{a+b+c}$$
$$\eta = \frac{a\eta_1 + b\eta_2 + c\eta_3}{a+b+c}$$

Digitized by Google

§ 77. Für die parallelen Linien a und b, deren Halbierungspunkte durch die auf a und b senkrechte Linie e verbunden sind, ist, wenn a als Abscissenachse angesehen wird,



$$(a+b+e)\quad \eta_1 = e\cdot e/2 + be$$

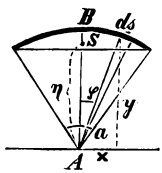
$$\eta_1 = e\,(e/2 + b)$$

$$\frac{a+b+e}{}$$

§ 78. Der **Schwerpunkt eines beliebigen Bogens** s der Kurve $x = f_x$ findet sich aus $s\cdot\xi = \int x\,ds$

$$s\cdot\eta_1 = \int y\,ds$$

Beispiele.



1. Beim **Kreisbogen** liegt S in der symmetrischen Achse BA.

Aus $s\cdot\eta = \int y\,ds$ folgt, da $y = r\cos\varphi$

$$ds = r\,d\varphi$$

$$s = 2\,\alpha\,r,$$

$$\alpha r\eta = r^2 \int_{-\alpha/2}^{+\alpha/2} \cos\varphi\,d\varphi$$

$$\eta = \frac{2r}{\alpha}\sin\alpha/_2$$

Hieraus ergiebt sich $\eta : r = \text{Sehne} : \text{Bogen}$.

Für den Halbkreis ist daher $\eta_1 = \frac{2r}{\pi}$.

2. Für den in A anhebenden **Parabelbogen** s ist

$s\xi = \int x\,ds$, daher, weil $y^2 = 2ax$, $y\,dy = a\,dx$,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2, \qquad ds = dx\sqrt{1 + \frac{a^2}{y^2}},$$

$$s\xi = \int x\sqrt{1 + \frac{a}{2x}}\,dx.$$ Ebenso ergiebt sich

$$s\eta = \int \sqrt{a^2 + 2ax}\,dx.$$

3. Für den **Bogen s der Viertelellipse** ist

$$s\xi = \int \frac{x\,dx}{a^2 y}\sqrt{a^4 y^2 + b^4 x^2}\ \text{ꝛc.}$$

$$s\eta = \int \frac{dx}{a^2}\sqrt{a^4 y^2 + b^4 x^2}\ \text{ꝛc.}$$

Digitized by Google

4. Für den ist A anhebenden Cykloidenbogen ist, da

$$x = a\varphi - a \sin \varphi \text{ und}$$
$$ds = 2a \sin \varphi/2 \, d\varphi,$$

$$s\xi = 2a^2 \int (\varphi - \sin\varphi) \sin \varphi/2 \, d\varphi$$
$$= 2a^2 \int \varphi \sin \varphi/2 \, d\varphi - 8a^2 \int \sin^2 \varphi/2 \cos \varphi/2 \, d\varphi/2$$
$$= -4a^2 \varphi \cos \varphi/2 - 8a^2 (\tfrac{1}{3} \sin 3\varphi/2 - \sin \varphi/2) + c.$$

Da für $\varphi = 0$ auch $s = 0$, so ist $c = 0$.

Da ferner $s = 2 \int a \sin \varphi/2 \, d/2$

$$= 4a \int \sin \varphi/2 \, d\varphi/2$$
$$= -4a \int_0^{\varphi/2} \cos \varphi/2$$
$$= 4a (1 - \cos \varphi/2), \text{ so ist}$$

$$\xi = \frac{a (-\varphi \cos \varphi/2 + 2 \sin \varphi/2 - \frac{2}{3} \sin^3 \varphi/2)}{1 - \cos \varphi/2} \text{ also}$$

für den Bogen der ganzen Cykloide (für welchen $\varphi = 2\pi$) $\xi = a\pi$.

Ferner ist, da $y = a - a \cos \varphi$ und $ds = 2a \sin \varphi/2 \, d\varphi$,

$$s\eta = 4a^2 \int (1 - \cos \varphi) \sin \varphi/2 \, d\varphi/2$$
$$= -4a^2 \int 2 \sin^2 \varphi/2 \cdot \sin \varphi/2 \, d\varphi/2$$
$$= -8a^2 \int (1 - \cos^2 \varphi/2) \, d \cos \varphi/2$$
$$= -8a^2 (\cos \varphi/2 - \tfrac{1}{3} \cos^3 \varphi/2) + c.$$

Da für $\varphi = 0$ auch $s = 0$, so ist $c = \frac{16}{3} a^2$.

Da ferner $s = 4a (1 - \cos \varphi/2)$ so ist

$$\eta = -\frac{2a (\cos \varphi/2 - \frac{1}{3} \cos^3 \varphi/2) + \frac{4}{3} a}{1 - \cos \varphi/2}, \text{ also}$$

für den Bogen der ganzen Cykloide (für welchen $\varphi = 2\pi$) $\eta = \frac{2}{3} a$.

B. Schwerpunkt ebener Flächen.

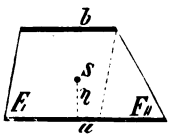
§ 79. Der Schwerpunkt eines Dreiecks ist der Durchschnitt der von den Ecken nach den Gegenseitenmitten gezogenen Transversalen.

§ 80. Der Schwerpunkt eines Parallelogramms ist der Diagonalendurchschnitt.

§ 81. Der Schwerpunkt eines regelm. Polygons ist dessen Centrum.

Digitized by Google

§ 82. Schwerpunkt eines Trapezes.

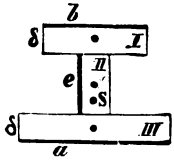


Teilt man die Fläche F des Trapezes durch eine einer Seite Parallele in ein Parallelogramm F, und Dreieck F„ so ist

$$F\eta = F,\cdot h/_2 + F_{„}\ h/_3, \text{ daher}$$

$$\eta = \frac{h\,(a+2b)}{3\,(a+b)}$$

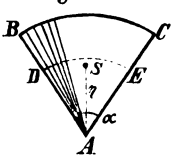
§ 83. Schwerpunkt eines T.



$$F\eta = F,\eta, + F_{„}\eta_{„} + F_{„,}\eta_{„,} \text{ daher}$$

$$\eta = \frac{a\cdot\delta/_2 + e\,(e/_2+\delta) + b\,(e+\frac{3}{2}\delta)}{a+b+e}$$

§ 84. Schwerpunkt eines Kreissectors.



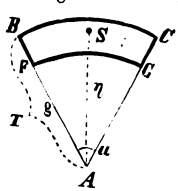
Denkt man den Kreissektor in unendlich kleine Sektoren zerlegt, so kann man diese als Dreiecke ansehen, deren Schwerpunkte einen Bogen DE bilden, welcher dem Bogen BC des gegebenen Sektors parallel ist. Daher ist der Schwerpunkt des gegebenen Sektors identisch mit dem Schwerpunkte des Bogens DE. Nach § 78, 1 ist $\eta : AD =$ Sehne DE : Bogen DE.

$$\eta : \tfrac{2}{3}r = \tfrac{4}{3}r\sin\alpha/_2 : \tfrac{2}{3}r\alpha$$

$$\eta = \frac{4\,r\sin\alpha/_2}{3\,\alpha}$$

Zusatz. Für $\alpha = \pi$ ergiebt sich für den **Schwerpunkt der Halbkreisfläche** $\eta = \frac{4r}{3\pi}$.

§ 85. Schwerpunkt eines Kreisringstücks.



Bezeichnen η_1 u. η_2 die Schwerpunktsordinaten der Sektoren ABC u. AFG, so ist

$$ABC\cdot\eta, = \text{Ring.}\ \eta + AFG\cdot\eta_2$$

$$\text{Ring.}\ \eta, = ABC\cdot\eta, - AFG\cdot\eta_{„}$$

$$(r^2-\rho^2)\,\alpha\eta = r^2\alpha\eta, - \rho^2\,\alpha\eta_{„}.$$

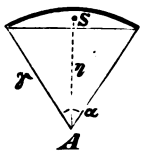
Nach dem vorigen § ist $\eta_{„} = \frac{4\,r\sin\alpha/_2}{3\,\alpha}$

Digitized by Google

$$\eta_{,,} = \frac{4\,\rho \sin \alpha/2}{3\alpha}, \text{ daher}$$

$$\eta = \frac{4\,(r^3 - \rho^3) \sin \alpha/2}{3\,(r^2 - \rho^2)\,\alpha}.$$

§ 86. Schwerpunkt eines Kreissegments.



Bezeichnen F F, F,, die Segmentfläche, die Sektorfläche, die Dreiecksfläche, so ist

$$F\eta = F,\eta, - F,,\eta,,$$

$$r^2(\alpha - \tfrac{1}{2}\sin\alpha)\,\eta = \frac{r^2\alpha \cdot 4r\sin\alpha/2}{3\alpha} - \frac{r^2}{2}\sin\alpha \cdot 2/3\, r\cos\alpha/2$$

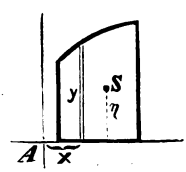
$$\eta = \frac{4\,r\sin^3\alpha/2}{3\,(\alpha - \sin\alpha)}$$

Zusatz. Für $\alpha = \pi$ ergiebt sich, wie in § 84 Zusatz, für den Schwerpunkt der Halbkreisfläche $\eta = \frac{4}{3\pi}\,r$.

§ 87. Schwerpunkt einer Fläche zwischen einem Kurvenbogen und den Ordinaten der Endpunkte dieses Bogens.

$$F\cdot\xi = \int xy\,dx$$

$$F\cdot\eta = \int \tfrac{1}{2}\,y^2 dx$$



Beispiele.

1. Für die in A anhebende Parabelfläche zwischen dem Bogen und der x-achse ist

$$\tfrac{2}{3}xy\xi = \sqrt{p}\cdot\int x^{\frac{1}{2}}\,dy$$

$$= \tfrac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\sqrt{p} + (c = o)$$

$$\xi = \tfrac{3}{5}x.$$

Aus $\tfrac{2}{3}xy\eta = \int \tfrac{1}{2}y^2 dx = p/2 \int x\,dx$ ergiebt sich

$$\eta = \tfrac{3}{5}y.$$

2. Für die Fläche zwischen der Parabel und der y-achse ist

$$\tfrac{1}{3}xy\xi = \int \tfrac{1}{2}x^2 dy$$

$$= \tfrac{1}{2}\int \frac{y^4}{p^2}\,dy \qquad \frac{1}{2p^2}\cdot 1/5\, y^5 + (c = o)$$

$$\frac{y^3}{3p}\xi = \frac{1}{10p^2}\,y^5$$

$$\xi = \frac{3y^2}{10p}$$

$$\xi = \frac{3}{10}\,x.$$

Digitized by Google

Aus $\frac{1}{3}x\eta = \int xy\,dy$ ergiebt sich

$$\eta = {}^3/_4\,y$$

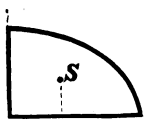
Anmerk. Die soeben gefundenen Resultate für ξ und η ergeben sich auch in folgender Weise:

Da die Fläche zwischen Parabel und y-achse die Differenz aus dem Rechtecke xy und der Fläche zwischen Parabel und x-achse ist, so ist

$\frac{1}{3}xy\xi = xy\cdot x/_2 - \frac{2}{5}xy\cdot\frac{3}{5}x$, daher $\xi = {}^3/_{10}x$.

$\frac{1}{3}xy\eta = xy\cdot y/_2 - \frac{2}{3}xy\cdot\frac{3}{8}y$, daher $\eta = \frac{3}{4}y$.

3. Für den Ellipsenquadranten ist



$$F\cdot\xi = \int xy\,dx$$

$$= -\,b/_{2a}\,(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\cdot\tfrac{2}{3} + c.$$

Für $x = o$ ist $F = o$, daher $c = \frac{1}{3}a^2b$.

$$\tfrac{1}{4}\,ab\,\pi\xi = -\,b/_{3a}\,(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}} + \tfrac{1}{3}a^2b, \text{ woraus}$$

$$\xi = \frac{4}{3\pi}\,a.$$

Aus $F\cdot\eta = \int \frac{1}{2}y^2dx = \frac{b^2}{2}\int\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx$.

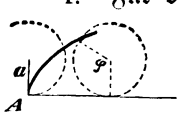
$$= \frac{b^2}{2}\left(x-\frac{x^3}{3a^2}\right) + (c = o) \text{ ergiebt sich}$$

$$\eta = \frac{4}{3\pi}\,b.$$

Zusatz. Für den Schwerpunkt der halben Ellipsenfläche ist

$$\xi = o,\quad \eta = \frac{4}{3b}\,\pi.$$

4. Für die in A anhebende Cykloidenfläche ist



$$F\cdot\xi = \int xy\,dx \qquad \begin{aligned} x &= a\,(\varphi - \sin\varphi)\\ y &= a\,(1-\cos\varphi)\\ dx &= a\,(1-\cos\varphi)\,d\varphi \end{aligned}$$

$$F\cdot\xi = a^3\int(\varphi-\sin\varphi)\,(1-\cos\varphi)^2\,d\varphi$$

$$= a^3\int(1-\cos\varphi)^2\,d\varphi - a^3\int\sin\varphi\,(1-\cos\varphi)^2\,d\varphi.$$

Setze $(1-\cos\varphi)^2\,d\varphi = d\psi$,

also $\psi = \frac{3}{2}\varphi - 2\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi$.

$$F\cdot\xi = a^3(\varphi\psi - \int\psi\,d\varphi) - a^3(\psi\sin\varphi - \int\psi\cos\varphi\,d\varphi)$$

$$= a^2\left[\tfrac{3}{2}\varphi^2 - 2\varphi\sin\varphi + \tfrac{1}{4}\varphi\sin 2\varphi - \tfrac{1}{4}\varphi^2 + 2\cos\varphi + \tfrac{1}{8}\cos 2\varphi - \tfrac{1}{3}(1-\cos\varphi)^3\right] + c$$

Digitized by Google

Für $\varphi = 0$ ist $F = 0$, daher $c = \frac{5}{8} a^3$, daher

$$F \cdot \xi = a^3 \left[\tfrac{3}{2}\varphi^2 - 2\varphi \sin\varphi + \tfrac{1}{4}\varphi \sin 2\varphi - \tfrac{3}{4}\varphi^2 - 2\cos\varphi + \tfrac{1}{8}\cos 2\varphi - \tfrac{1}{3}(1-\cos\varphi)^3\right] + \tfrac{5}{8}a^3.$$

Für die **Fläche der ganzen Cykloide** (für welche $\varphi = 2\pi$) ist daher

$$3a^2\pi \cdot \xi = a^3\left[\tfrac{3}{2}\cdot 4\pi^2 - 3\pi^2 - 2 + \tfrac{1}{8}\right] + \tfrac{5}{8}a^3, \text{ woraus}$$

$$\xi = a\pi.$$

Ferner ist $F \cdot \eta = \int \frac{1}{2} y^2 \, dx \quad \left| \begin{array}{l} y^2 = a^2(1-\cos\varphi)^2 \\ dx = a\,(1-\cos\varphi)\,d\varphi \end{array} \right.$

$$F \cdot \eta = \frac{a^3}{2} \int (1-\cos\varphi)^3 \, d\varphi.$$

$$= \frac{a^3}{2}\left(\varphi - 3\sin\varphi + \tfrac{3}{2}\varphi + \tfrac{3}{4}\sin 2\varphi - \sin\varphi + \tfrac{1}{3}\sin^3\varphi\right)$$

$$= \frac{a^3}{2}\left(\tfrac{5}{2}\varphi - 4\sin\varphi + \tfrac{3}{4}\sin 2\varphi + \tfrac{1}{3}\sin^3\varphi\right).$$

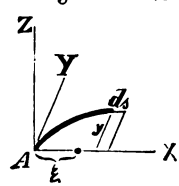
Für die **Fläche der ganzen Cykloide** (für welche $\varphi = 2\pi$) ist daher

$$3a^2\pi \cdot \eta = \frac{a^3}{2}(5\pi), \text{ woraus}$$

$$\eta = \tfrac{5}{6}a.$$

C. Schwerpunkt von Rotationsoberflächen.

§ 88. Der Schwerpunkt einer Rotationsoberfläche liegt offenbar in der Rotationsachse, daher ist, wenn AX die Rotationsachse, $\eta = 0$. Bezeichnet O die Rotationsoberfläche, so ist

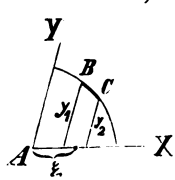


$dO = 2\pi y \, ds$, daher $O \cdot \xi = \int 2\pi y \, ds \cdot x$ oder

$$O \cdot \xi = 2\pi \int xy\,ds.$$

Beispiele.

1. Schwerpunkt der Kugelzone.



$O \cdot \xi = \pi \int xy \, ds \quad x^2 + y^2 = r^2$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$$ds = \begin{cases} \frac{dx}{y}\sqrt{x^2+y^2} = \frac{dx}{y}r \\ \frac{dy}{x}\sqrt{x^2+y^2} = \frac{dy}{x}r \end{cases}$$

Digitized by Google

$$0 \cdot \xi = 2\pi \int r x \, dx$$
$$= \pi r x^2 + (c = -\pi r y,^2).$$ Da nun $0 = 2r\pi (x_2 - x_1)$, so ist
$\xi = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$.

Zusatz. Für die Kalotte ist $\xi = \frac{1}{2}(r + x)$.
Für die Halbkugelfläche ist $\xi = \frac{1}{2} r$.

2. Oberfläche des Rotationsparaboloids.

$$0 \cdot \xi = 2\pi \int xy \, ds \quad \left| \begin{array}{l} y^2 = 2ax \\ \frac{dy}{dx} = \frac{a}{y} \\ ds = \frac{dx}{y} \sqrt{a^2 + y^2} \end{array} \right.$$

$$0 \cdot \xi = 2\pi \int x \, dx \sqrt{a^2 + 2ax}$$
$$= 2\pi \sqrt{a} \int x \, dx \sqrt{a + 2x}. \quad \text{Setze } \sqrt{a + 2x} = t$$
$$x = \frac{t^2 - a}{2}$$
$$dx = t \, dt$$
$$0 \cdot \xi = \pi \sqrt{a} \int (t^2 - a) t^2 \, dt$$
$$= \pi \sqrt{a} \int t^4 dt - a t^2 dt$$
$$= \pi \sqrt{a} \left[\tfrac{1}{5} (a + 2x)^{\frac{5}{2}} - a/_3 (a + 2x)^{\frac{3}{2}} \right] + (c = \tfrac{2}{15} a^3 \pi).$$

3. Oberfläche des durch Rotation um die große Achse entstehenden Ellipsoids.

$$0 \cdot \xi = 2\pi \int xy \, ds \quad \left| \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y} \\ ds = \frac{dx}{a^2 y} \sqrt{a^4 y^2 + b^4 x^2} \end{array} \right.$$

$$0 \cdot \xi = 2\pi \int \frac{x \, dx}{a^2} \sqrt{a^4 y^2 + b^4 x^2}$$
$$= \frac{2b\pi}{a^2} \int x \, dx \sqrt{a^4 - c^2 x^2}$$
$$= -\frac{2b\pi}{3a^2c^2} (a^4 - c^2 x^2)^{\frac{3}{2}} + \left(c = \frac{2a^4 b\pi}{3c^2} \right).$$

Für die Oberfläche des halben Ellipsoids ist daher

$$\left(b^2\pi + \frac{a^2 b\pi}{c} \arcsin = \frac{c}{a} \right) \cdot \xi = -\frac{2b\pi}{3a^2c^2} (a^4 - a^2c^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{2a^4 b\pi}{3c^2}$$
$$= \frac{2a\, b\pi\, (a^3 - b^3)}{3c^2}$$
$$\xi = \frac{2a\,(a^3 - b^3)}{3(c^2 b + a^2 c \arcsin c/a}$$

Digitized by Google

4. Oberfläche des durch Rotation um die Cykloidenbasis entstehenden Cykloidoids.

$$0\cdot\xi = 2\pi \int xy\,ds \quad \left| \begin{array}{l} y = a - a\cos\varphi \\ x = a\varphi - a\sin\varphi \\ ds = 4a\sin\varphi/_2\, d\frac{\varphi}{2} \end{array} \right.$$

$$= 8a^3\pi \int (\varphi - \sin\varphi)(1-\cos\varphi)\sin\varphi/_2\, d\varphi/_2$$

$$= 8a^3\pi \left[\int \varphi\,(1-\cos\varphi)\sin\varphi/_2\, d\tfrac{\varphi}{2} - \int \sin\varphi\,(1-\cos\varphi)\sin\varphi/_2\, d\tfrac{\varphi}{2}\right]$$

Setze $(1-\cos\varphi)\sin\varphi/_2\, d\frac{\varphi}{2} = dt$, also

$$t = \int 2\sin^2\varphi/_2 \cdot \sin\varphi/_2\, d\tfrac{\varphi}{2}$$
$$= -2\int \sin^2\varphi/_2\, d\cos\varphi/_2$$
$$= -2\int (1-\cos^2\varphi/_2)\, d\cos\varphi/_2$$
$$= -2\cos\varphi/_2 + \tfrac{2}{3}\cos^3\varphi/_2$$

$$0\cdot\xi = 8a^3\pi \begin{cases} -2\varphi\cos\varphi/_2 + \frac{2}{3}\varphi\cos^3\varphi/_2 \\ -2\int(-\cos\varphi/_2\, d\varphi + \frac{2}{3}\cos^3\varphi/_2\, d\varphi) \\ -\int 4\sin^4\varphi/_2\cos\varphi/_2\, d\frac{\varphi}{2} \end{cases}$$

Nun ist $\int (-\cos\varphi/_2\, d\varphi + \frac{2}{3}\cos^3\varphi/_2\, d\varphi$

$$= \int -2\cos\varphi/_2 + \tfrac{4}{3}\cos^3\varphi/_2\, d\tfrac{\varphi}{2}$$
$$= -2\sin\varphi/_2 + \tfrac{4}{3}\int (1-\sin^2\varphi/_2)\cos\varphi/_2\, d\tfrac{\varphi}{2}$$
$$= -2\sin\varphi/_2 + \tfrac{4}{3}(\sin\varphi/_2 - \tfrac{1}{3}\sin^3\varphi/_2)$$
$$= -\tfrac{2}{3}\sin\varphi/_2 - \tfrac{4}{9}\sin^3\varphi/_2.$$

Ferner ist $\int 4\sin^4\varphi/_2\cos\varphi/_2\, d\varphi/_2$

$$= 4\int \sin^4\varphi/_2\, d\sin\varphi/_2$$
$$= \tfrac{4}{5}\sin^5\varphi/_2, \text{ daher}$$

$$0\cdot\xi = 8a^3\pi\left[-2\varphi(\cos\varphi/_2 - \tfrac{1}{3}\cos^3\varphi/_2) + \tfrac{4}{3}\sin\varphi/_2 + \tfrac{8}{9}\sin^3\varphi/_2 - \tfrac{4}{5}\sin^5\varphi/_2\right]$$

$$= 16a^3\pi\left[-\varphi(\cos\varphi/_2 - \tfrac{1}{3}\cos^3\varphi/_2) + \tfrac{2}{3}\sin\varphi/_2 + \tfrac{4}{9}\sin^3\varphi/_2 - \tfrac{2}{5}\sin^5\varphi/_2\right]$$

D. Schwerpunkt von Rotationskörpern.

§ 89. Vorbemerkung. Der Schwerpunkt eines Körpers mit einer Symmetralebene liegt in dieser; der eines Körpers mit zwei Symmetralebenen liegt in deren Durchschnittslinie; der eines Körpers mit drei Symmetralebenen ist der Durchschnittspunkt dieser drei Ebenen.

§ 90. Ist ein Rotationskörper durch Drehung um die x-achse entstanden, so ist für seinen Schwerpunkt $\eta = 0$. Bezeichnet V den Inhalt dieses Rotationskörpers, so ist $dV = y^2\pi\, dx$,

daher $V\cdot\xi = \int y^2\pi\, x\, dx$.

Digitized by Google

Beispiele.

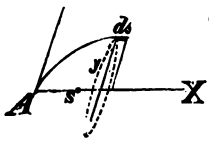
1. Halbkugel.

$$V \cdot \xi = \int (r^2 - x^2)\,\pi\, x\, dx$$
$$= \frac{\pi r^2}{2} x^2 - \frac{\pi}{4} x^2 + (c = o)$$

Für die Halbkugel ist $V = \frac{2}{3} r^3 \pi$, $x = r$, daher

$$\xi = \frac{3}{8} r.$$

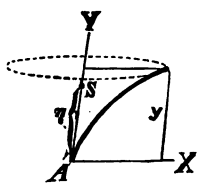
2. Paraboloid.



a) $V \cdot \xi = \int y^2 \pi\, x\, dx$
$= 2a\pi \int x^2\, dx$
$= \frac{2}{3} a\pi x^3 + (c = o)$

$V = \int \pi y^2\, dx = 2a\pi \int x\, dx$
$= 2a\,\pi \cdot \frac{x^2}{2}$
$= \frac{y^2 \pi x}{2}$

$$\xi = \tfrac{2}{3} x.$$



b) $V \cdot \eta = \int x^2 \pi\, y\, dy$
$= \pi \int \frac{y^5}{5a^2}\, dy$
$= \frac{\pi}{5a^2} \cdot \frac{1}{6} y^6 + (c = o).$ $\qquad V = \pi/_5\, x^2 y$
$\eta = \frac{5}{6} y.$

3. Cykloidoid.

$V \cdot \xi = \int y^2 \pi\, x\, dx$

$x = a\varphi - a \sin \varphi$
$y = a - a \cos \varphi$
$dx = (a - a \cos \varphi)\, d\varphi.$

$V \cdot \xi = a^4 \pi \int (\varphi - \sin \varphi)\,(1 - \cos \varphi)^3\, d\varphi$
$= a^4 \pi \int \varphi\,(1 - \cos \varphi)^3\, d\varphi - a^4 \pi \int \sin \varphi\,(1 - \cos \varphi)^3\, d\varphi.$

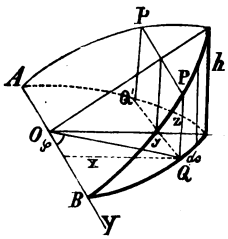
Setze $(1 - \cos \varphi)^3\, d\varphi = dt$, also

$t = \int (1 - 3\cos \varphi + 3\cos^2 \varphi - \cos^3 \varphi)\, d\varphi$
$= \frac{5}{2}\varphi - 4 \sin \varphi + \frac{3}{4} \sin 2\varphi + \frac{1}{3} \sin^3 \varphi$

$V \cdot \xi = a^4 \pi \left\{ \begin{array}{l} \varphi\,(\frac{5}{2}\varphi - 4 \sin \varphi + \frac{3}{4} \sin 2\varphi + \frac{1}{3} \sin^3 \varphi) \\ -\frac{1}{4}(1 - \cos \varphi)^4 - \int (\frac{5}{2}\varphi - 4 \sin \varphi + \frac{3}{4} \sin 2\varphi \\ + (c = o). \end{array} \right. \qquad [+\tfrac{1}{3} \sin^3 \varphi)\, d\varphi$

Digitized by Google

§ 91. Hilfsaufgabe. Mantel und Volumen des Klauen zu finden.



Lösung 1. S. Deter, Stereometrie pg. 43.

Lösung 2. Bezeichne M den Teil des Klauenmantels zwischen B u. PQ, so ist

$dM = z\,ds$

$M = \int z\,ds$ | $ds = r\,d\varphi$

$z : h = x : r$ u. $x = r\sin\varphi$, daher

$z = h\sin\varphi$ und

$M = rh\int \sin\varphi\,d\varphi$

$= rh\cos\varphi + (c = rh)$

$= rh(1 - \cos\varphi)$.

Daher, für $\varphi = \pi$, **der ganze Klauenmantel $= 2\,rh$.**

Bezeichnet V den Teil des Klauen zwischen BA u. PQQ'P', so ist

$dV = 2y\,dx \cdot z$

$V = 2\int yz\,dx$ | $z = h\sin\varphi$

$y = r\cos\varphi$

$x = r\sin\varphi$, $dx = r\cos\varphi\,d\varphi$.

$V = 2r^2h\int \sin\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi$

$= -2r^2h\int \cos^2\varphi \cdot d\cos\varphi$

$= -\frac{2}{3}r^2h\cos^3\varphi + (c = \frac{2}{3}r^2h)$

$= \frac{2}{3}r^2h(1 - \cos^3\varphi)$.

Daher für $\varphi = \pi/2$ der **ganze Klaueninhalt $= \frac{2}{3}r^2h$.**

§ 92. Aufgabe. Den Schwerpunkt des Klauenmantels und des Klauen zu bestimmen.

Lösung. $M \cdot \xi = \int z\,ds \cdot x$ | $ds = r\,d\varphi$

$x = r\sin\varphi$

$z = h\sin\varphi$

$M \cdot \xi = r^2h\int \sin^2\varphi\,d\varphi$.

$= r^2h\int \frac{1 - \cos 2\varphi}{2}\,d\varphi$

$= \frac{r^2h}{2}\int \frac{1 - \cos 2\varphi}{2}\,d\,2\varphi$

$= \frac{r^2h}{2}\int \frac{1}{2}\,d\,2\varphi - \frac{r^2h}{2}\int \frac{\cos 2\varphi}{2}\,d\,2\varphi$

$= \frac{r^2h}{2}\varphi - \frac{r^2h}{4}\sin 2\varphi + (c = 0)$.

Digitized by Google

Für $\varphi = \pi$ ist $M = 2rh$, daher

$\xi = \frac{1}{2} r\pi$

$M \cdot \eta = \int z\, ds \cdot y = r^2 h \int \sin\varphi \cos\varphi\, d\varphi$

$= \frac{r^2 h}{2} \sin^2\varphi + (c = o).$ Für $\varphi = \pi$ ist $M = 2rh$, daher

$\eta = o.$

$M \cdot \zeta = \int z\, ds \cdot z$

$= rh^2 \int \sin^2\varphi\, d\varphi$

$= \frac{rh^2}{2} \int (1 - \cos 2\varphi)\, d\varphi$

$= \frac{rh^2}{2} \varphi - \frac{rh^2}{4} \sin 2\varphi + (c = o).$ Für $\varphi = \pi$ ist $M = 2rh$, daher

$\zeta = \frac{1}{2} h\pi.$

Bezeichnet V den Teil des Klauen zwischen BA u. PQQ'P', so ist

$dV = 2z \cdot y\, dx$, daher $V = 2 \int z\, y\, dx$ und

$V \cdot \xi = 2 \int z\, y\, dx \cdot x = 2r^3 h \int \sin^2\xi \cos^2\varphi\, d\varphi$

$= \frac{r^3 h}{4} \int \sin^2 2\varphi\, d\, 2\varphi$

$= \frac{r^3 h}{16} \int (1 - \cos 4\varphi)\, d\, 4\varphi$

$= \frac{r^3 h}{16} (4\varphi - \sin 4\varphi) + (c = o).$ Für $\varphi = \pi/2$ ist $V = \frac{2}{3} r^2 h$, daher

$\xi = \frac{3}{16} r\pi.$

$\eta = o$ folgt aus der Natur des Klauen, da Oh eine Symmetralebene ist.

$V = 2 \int z \cdot y\, dx$

$V \cdot \zeta = 2 \int z\, y\, dx \cdot z = 2r^2 h^2 \int \cos^2\varphi \sin^2\varphi\, d\varphi$

$= \frac{r^2 h^2}{4} \int \sin^2 2\varphi\, d\, 2\varphi$

$= \frac{r^2 h^2}{16} (4\varphi - \sin 4\varphi).$ Für $\varphi = \pi/2$ ist $V = \frac{2}{3} r^2 h$, daher

$\zeta = \frac{3}{16} h\pi.$

Digitized by Google

§ 93. Guldiniſche Regel.

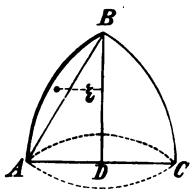
a) Die Oberfläche eines Rotationskörpers iſt gleich dem erzeugenden Bogen mal dem Wege ſeines Schwerpunktes.

b) Das Volumen eines Rotationskörpers iſt gleich der erzeugenden Fläche mal dem Wege ihres Schwerpunktes.

$$\begin{aligned} O &= \int 2x\pi \, ds \\ &= 2\pi \int x \, ds \\ &= 2\pi \, s \, \xi \\ &= s \cdot 2\xi\pi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dV &= 2x\pi \cdot dF \\ &= 2\pi \int x \, dF \\ &= 2\pi \, F\xi \\ &= F \cdot 2\xi\pi. \end{aligned}$$

Beiſpiel. Kuppel, welche durch Rotation eines Kreisbogens von 60^0 entſteht.



$$O = AB \cdot 2\xi\pi = \tfrac{2}{3} r \xi \pi^2 \qquad \mathbf{O = r^2\pi\sqrt{3} - \tfrac{1}{3} r^2\pi^2.}$$

$r/2 + \xi = \eta$ (ſ. S des Kreisb.)

$\eta : r =$ Sehne : Bogen

$(r/2 + \xi) : r = r\sqrt{3} : \tfrac{2}{3}r\pi.$

$$\xi = r/2\,(3/\pi\sqrt{3} - 1)$$

$$V = \widehat{ABD} \cdot 2\xi\pi = \left(\frac{r^2\pi}{6} - \frac{r^2\sqrt{3}}{8}\right) \cdot 2\xi\pi$$

$$\eta = \tfrac{2}{3} r \cdot \frac{\sin^3 \alpha}{\alpha - \sin\alpha \cos\alpha}$$

$$\xi = \eta - r/2$$

$$\xi = \frac{2r \sin^3 \alpha}{3\,(\alpha - \sin\alpha \cos\alpha)}$$

oder, da $\alpha = \pi/3$

$$\xi = \frac{3r\sqrt{3}}{4\pi - 3\sqrt{3}} - r/2$$

$$V = (4\pi - 3\sqrt{3}) \left(\frac{3\sqrt{3}}{4\pi - 3\sqrt{3}} - \tfrac{1}{2}\right) \frac{r^2\pi}{12}$$

$$= \left(3\sqrt{3} - \frac{1}{8\pi - 6\sqrt{3}}\right) \frac{r^3\pi}{12}.$$

Digitized by Google

Inhalt.

			Seite
I.	Abschnitt.	Ableitung der Differentialformeln	1
II.	„	Höhere Differentiale	
		Maclaurinscher und Taylorscher Satz	12
III.	„	Bestimmung der wahren Werte $\frac{0}{0}$ ꝛc.	17
IV.	„	Maxima und Minima	23
V.	„	Konkavität und Konvexität	29
VI.	„	Differentiation verwickelter Funktionen	33
VII.	„	A. Differentiation der Funktionen mehrerer absolut Veränderlichen	37
		B. Maxima und Minima dieser Funktionen	41
		C. Maxima und Minima mit Nebenbedingungen . .	45
VIII.	„	Tangenten und Krümmung der Kurven	48
IX.	„	Evolventen und Evoluten	58
X.	„	Die wichtigsten Sätze der Integralrechnung . . .	62
XI.	„	Rektifikation und Quadratur der Kurven	76
XII.	„	Komplanation und Kubatur der Revolutionskörper	90
XIII.	„	Integration der Differentialgleichungen	94
XIV.	„	Schwerpunktsbestimmungen	106

Gedruckt bei Imberg & Lesson, Berlin S. Alte Jacobstr. 64 a.

Digitized by Google

Digitized by Google

Der Elektro-Techniker 1892. No. 20 v. 29. Februar.

Dieses sorgfältig redigirte Werkchen, welches sich in anspruchsloser Form präsentiert, enthält auf dem Raum von 118 Seiten eine große Anzahl der häufig vorkommenden Differential- und Integral-Formeln nebst kurzen Erläuterungen. Durch die in den Text eingeschalteten Figuren (Kurven) wird das Verständniß der angeführten Lehrsätze wesentlich gefördert. Das Werkchen ist ein werthvoller Behelf für alle mathematisch gebildeten Personen und sei denselben hiermit wärmstens empfohlen.

Baugewerkzeitung 1892. No. 17 v. 27. Februar.

Das kleine Werk wird Jedem, welcher sich mit Differential- und Integralrechnung beschäftigt und welcher im Laufe der Zeit wegen Nichtanwendung dieser Rechnungsweise den Zusammenhang verloren hat, gute Dienste leisten, um sich wieder in diesem Theile der Mathematik zurecht zu finden. Die ersten 62 Seiten des Werkchens sind der Wiederholung der Differentialrechnung gewidmet, während der übrige Theil des 118 Seiten enthaltenden Werkes der Integralrechnung überlassen ist. Die Entwickelung der einzelnen Formeln ist eine klare und die Wahl der Beispiele eine so glückliche, daß wir dieses Werkchen allen Freunden dieses Zweiges der Mathematik sehr warm empfehlen können.

Neueste Erfindungen und Erfahrungen. Jahrg. XIX. Heft 10.

Ein mit vielem Fleiße und größter Umsicht ausgearbeitetes Repetitorium, welches den Mathematik-Studirenden, wie auch den Elektrotechnikern in ihrem eigenen Interesse bestens zu empfehlen ist.

Der Techniker 1892. No. 6. April.

Der Titel besagt, was in dem Buch enthalten. Es ist ein für jeden Ingenieur nützliches Buch. Die Differential- und Integralrechnungen kommen nicht so häufig in der Praxis vor, daß man die Formeln und Sätze nur so ohne Weiteres aus dem Stegreif herschreiben und ableiten könnte; in technischen Handbüchern ist denselben nicht genug Raum gewidmet und Lehrbücher sind eben als Lehrbücher verfaßt und daher zum Nachschlagen weniger geeignet. Im vorliegenden Werk sind die Sätze und Ableitungen in systematischer Anordnung gesammelt und deren Anwendung durch trefflich gewählte Beispiele erläutert. Wir finden, daß das Buch den angestrebten Zweck in jeder Hinsicht erreicht, und empfehlen dasselbe auf's Beste.

Glaser's Annalen. 1892. Heft 7 v. 1. Oktober.

Eine klare und verständliche Zusammenstellung von Sätzen und Formeln mit leicht faßlicher Erläuterung an der Hand gut gewählter Beispiele und vollständig durchgerechneter Uebungsaufgaben; ein empfehlenswerthes Repetitorium für Studierende.

Digitized by Google

Digitized by Google

OCT 29 1896
DUE DEC. 24 1923

Digitized by Google

Math 3008.94.3
Repetitorium der differential- und
Cabot Science 003318417
3 2044 091 898 072